

Категории и функторы.

Обозначения. Через $Set, Top, Ab, Grp, Cmr, Mod_K, Vec_{\mathbb{k}} = Mod_{\mathbb{k}}, Ass_{\mathbb{k}}, A-Mod, Mod-A$ обозначаются категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец¹, модулей над коммутативным кольцом K , векторных пространств и ассоциативных алгебр над полем \mathbb{k} , левых и правых модулей над (некоммутативной) ассоциативной \mathbb{k} -алгеброй A . Категории функторов $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и предпучков $\mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{D}$ обозначаются через $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ и $pSh(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = Fun(\mathcal{C}^{opp}, \mathcal{D})$.

ГA1♦1. Обозначим через Δ_{big} категорию всех конечных упорядоченных множеств и неубывающих отображений между ними, а через $\Delta \subset \Delta_{big}$ её полную подкатеорию, состоящую из множеств $[n] \stackrel{def}{=} \{0, 1, \dots, n\}, n \geq 0$. Покажите, что а) категории Δ и Δ_{big} канонически эквивалентны б) алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$ порождается тождественными морфизмами $e_n = Id_{[n]}$, вложениями $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$, где $0 \leq i \leq n$ и образ не содержит i , и наложениями $s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1]$, где $0 \leq i \leq n-1$ и $(i+1) \mapsto i$. в*) Найдите образующие идеала соотношений между этими порождающими стрелками.

ГA1♦2. Для каждого $X \in Ob \mathcal{C}$ функтор $h^X : Y \mapsto Hom(X, Y)$ и предпучок $h_X : Y \mapsto Hom(Y, X)$ переводят стрелку $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ в отображения левого и правого умножения на эту стрелку:

$$\varphi_* : Hom(X, Y_1) \rightarrow Hom(X, Y_2), \psi \mapsto \varphi \circ \psi \quad \text{и} \quad \varphi^* : Hom(Y_2, X) \rightarrow Hom(Y_1, X), \psi \mapsto \psi \circ \varphi.$$

Проверьте, что сопоставления $X \mapsto h^X$ и $X \mapsto h_X$ задают вполне строгие функторы $\mathcal{C}^{opp} \rightarrow Fun(\mathcal{C}, Set)$ и $\mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{C}, Set)$.

ГA1♦3 (точные функторы). Функтор $F : Ab \rightarrow Ab$ (соотв. $Ab^{opp} \rightarrow Ab$) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра. Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что для любой группы $N \in Ob Ab$: а) функтор $X \mapsto X \otimes_{\mathbb{Z}} N$ точен справа, и предъявите группу N , для которой он не точен слева б) функторы h^N и h_N точны слева, и предъявите группы N , для которых они не точны справа.

ГA1♦4. Опишите произведения и копроизведения в а) Set б) Top в) Mod_K г) Grp д) Cmr .

ГA1♦5. Функторы $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг к другу, если имеется естественный по $X \in Ob \mathcal{C}$ и $Y \in Ob \mathcal{D}$ изоморфизм

$$Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)).$$

Докажите, что у заданного функтора G тогда и только тогда есть левый сопряжённый функтор F , когда для каждого $X \in Ob \mathcal{C}$ функтор $h_G^X : Y \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ копредставим, и в этом случае $F(X)$ его копредставляет. Найдите двойственные необходимые и достаточные условия наличия правого сопряжённого у данного функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

ГA1♦6. Предпучки $F : \mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{opp} \rightarrow \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*) друг к другу, если имеется функториальная по $C \in Ob \mathcal{C}$ и $D \in Ob \mathcal{D}$ биекция

$$Hom_{\mathcal{C}}(G(D), C) \simeq Hom_{\mathcal{D}}(F(C), D) \quad (\text{соотв. } Hom_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \simeq Hom_{\mathcal{D}}(D, F(C))).$$

а) Приведите примеры лево- и право- самосопряжённых предпучков.

б) Сформулируйте и докажите критерии существования лево- и правосопряжённых предпучков, аналогичные критериям из предыдущей задачи.

ГA1♦7. Для любого расширения $S \subset R$ ассоциативных алгебр с единицей постройте левый и правый сопряжённые функторы к функтору ограничения $res_S^R : R-Mod \rightarrow S-Mod$.

ГA1♦8. Сопоставим топологическому пространству X предпучок $S(X) : \Delta^{opp} \rightarrow Set$, переводящий $[n] \in Ob \Delta$ в множество непрерывных отображений $S_n(X) \stackrel{def}{=} Hom_{Top}(\Delta^n, X)$ из стандартного правильного симплекса² $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в X , а неубывающей стрелке $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ правое умножение $f \mapsto f \circ |\varphi|$ на аффинное отображение $|\varphi| : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$, действующее на вершины как φ . Покажите, что функтор $S : Top \rightarrow pSh(\Delta)$ сопряжён справа к функтору геометрической реализации $pSh(\Delta) \rightarrow Top$.

¹С единицами и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу.

²Т. е. выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов.

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
4а			
б			
в			
г			
д			
5			
6а			
б			
7			
8			