

Сопряжённые функторы и (ко)пределы.

- ГА2♦1.** Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ если и только если существуют естественные преобразования $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$, для которых композиции естественных преобразований¹ $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ равны тождественным эндоморфизмам функторов F и G .
- ГА2♦2.** Покажите, что для козамкнутости категории \mathcal{C} достаточно существования в \mathcal{C} начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.
- ГА2♦3.** Покажите, что замкнутая категория \mathcal{C} тогда и только тогда обладает начальным объектом, когда имеется такое множество $S \subset \text{Ob } \mathcal{C}$, что в каждый объект категории \mathcal{C} ведёт стрелка из некоторого объекта, лежащего в S .
- ГА2♦4*.** Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ на замкнутой категории \mathcal{C} копредставим если и только если он сохраняет пределы и в \mathcal{C} имеется такое множество объектов S , что для любых $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $x \in FX$ есть стрелка $\varphi : Y \rightarrow X$ с $Y \in S$ и $x \in \text{im } F\varphi$.
- ГА2♦5.** В категории $\mathcal{A}b$ для простого $p \in \mathbb{N}$ положим $A_n = \mathbb{Z}/(p^n)$, и при $n < m$ обозначим через $\psi_{nm} : A_m \twoheadrightarrow A_n$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : A_n \hookrightarrow A_m$ вложение $[1] \mapsto [p^{m-n}]$. Покажите, что а) $\lim A_n$ вдоль стрелок ψ_{mn} изоморфен группе целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_{(p)}$ б) $\text{colim } A_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен подгруппе классов дробей вида q/p^l в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .
- ГА2♦6.** В категории $\mathcal{A}b$ положим $B_n = \mathbb{Z}/(n)$, и при $n|m$ обозначим через $\psi_{nm} : B_m \twoheadrightarrow B_n$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : B_n \hookrightarrow B_m$ вложение $[1] \mapsto [m/n]$. Покажите, что а) $\lim B_n$ по стрелкам ψ_{nm} изоморфен неархимедову пополнению $\prod_p \mathbb{Z}_{(p)}$ группы \mathbb{Z} б) $\text{colim } B_n$ по стрелкам φ_{mn} изоморфен \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .
- ГА2♦7.** Пусть подмножество S в кольце² R с единицей таково, что $1 \in S$, $s, t \in S \Rightarrow st \in S$ и выполнены условия Оре: (O₁) $\forall \rho \in R \forall s \in S \exists \lambda \in R \exists t \in S : \lambda s = t\rho$ (O₂) $\forall \varphi, \psi \in R$ из $\exists s \in S : \varphi s = \psi s$ следует, что $\exists t \in S : t\varphi = t\psi$. Рассмотрим S как категорию, в которой $\text{Hom}_S(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$, и определим функтор $S \rightarrow \text{Mod-}R$, отправляя объект $s \in S$ в свободный правый R -модуль ранга один, базисный вектор в котором обозначим символом $[s^{-1}]$, а стрелку $\lambda \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм $[s_1^{-1}] \mapsto [s_2^{-1}] \cdot \lambda$. Покажите, что копредел этого функтора это (правый) R -модуль левых дробей $S^{-1}R$ образованный классами пар $s^{-1}\rho$ по отношению эквивалентности $s_1^{-1}\rho_1 \sim s_2^{-1}\rho_2$, означающему существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1 \rho_1 = \lambda_2 \rho_2$. Проверьте, что это и впрямь отношение эквивалентности и задайте на $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей.
- ГА2♦8.** Покажите, что все левые сопряжённые функторы перестановочны с копределами, а правые — с пределами³.
- ГА2♦9.** Для функтора $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ и объекта $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ обозначим через \mathcal{G}^X категорию, объектами которой являются пары (Y, f) , где $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ и $f : X \rightarrow GY$ — стрелка в \mathcal{C} , а морфизм $\varphi : (Y_1, f_1) \rightarrow (Y_2, f_2)$ это такая стрелка $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ в \mathcal{D} , что $f_2 = G\varphi \circ f_1$ в \mathcal{C} . Рассмотрим в \mathcal{D} тавтологическую диаграмму $G^X : \mathcal{G}^X \rightarrow \mathcal{D}$ из стрелок $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$, $\varphi \in \text{Mor } \mathcal{G}^X$. Покажите, что функтор G обладает левым сопряжённым функтором $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ если и только если G перестановочен с пределами и диаграмма G^X имеет предел в \mathcal{D} , причём в этом случае $FX = \lim G^X$.
- ГА2♦10*.** Покажите, что функтор $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ на замкнутой категории \mathcal{D} тогда и только тогда обладает левым сопряжённым, когда он перестановочен с пределами и для каждого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ имеется множество $S_X \subset \text{Ob } \mathcal{D}$ и такое семейство стрелок $\varphi_Y : X \rightarrow GY$, по одной для каждого $Y \in S_X$, что любая стрелка $\psi : X \rightarrow GZ$ с любым $Z \in \text{Ob } \mathcal{D}$ раскладывается в композицию $G\xi \circ \varphi_Y$ для некоторых $Y \in S_X$ и $\xi : Y \rightarrow Z$.

¹Здесь $(F \circ s)_X \stackrel{\text{def}}{=} F(s_X)$, $(t \circ F)_X \stackrel{\text{def}}{=} t_{F(X)}$ и т. д.

²Ассоциативном, но не обязательно коммутативном.

³Функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ перестановочен с (ко)пределами, если для любого $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и любой диаграммы $\Phi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ из того, что L является (ко)пределом Φ в \mathcal{C} , вытекает, что $F(L)$ является (ко)пределом диаграммы $F \circ \Phi$ в \mathcal{D} .

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6а			
б			
7			
8			
9			
10			