Короткий список аксиом абелевой категории

Терминология. Класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю правого умножения на обратимые стрелки называется *подобъектом*, а класс эквивалентности сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Минималистский список аксиом абелевой категории таков: (A0) есть нулевой объект 0 (A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение (A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро (A3) каждый мономорфизм является ядром, а каждый эпимирфизм — коядром для некоторой стрелки. Объект G называется *генератором* (соотв. *когенератором*), если функтор $h^G : X \mapsto \mathrm{Hom}(G, X)$ (соотв. $h_G : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, G)$) строг. Объект K козамкнутой категории называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \mathrm{Hom}(K, Z)$ коммутирует с бесконечными копроизведениями.

ГА3½◇1. Проверьте, что в любой категории отношение $\varphi \preccurlyeq \psi$ (соотв. $\varphi \succcurlyeq \psi$), означающее, что $\varphi = \psi\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi$) для некоторого ξ, задаёт частичный порядок на классе подобъектов (соотв. фактор объектов) произвольно заданного объекта.

ГА3½◇2. Покажите, что в категории, удовлетворяющей (A0) – (A3): **а)** сопоставление подобъекту его коядра, а фактор-объекту — его ядра являются сопряжёнными взаимно обратными друг друг функторами между частично упорядоченными классами[1] под- и фактор-объектов произвольно заданного объекта X. **б)** любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима **в)** любые два подобъекта имеют максимальную нижнюю грань (она называется их *пересечением*) и минимальную верхнюю грань (она называется их *объединением*) **г)** любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель[2] **д)** $\ker \operatorname{coker}(\alpha : A \to B)$ является наименьшим подобъектом[3] в B, через который пропускается стрелка α **е)** $\operatorname{coker} \ker(\alpha : A \to B)$ является наименьшим фактор-объектом[4] A, через который пропускается стрелка α **ж)** стрелка $\alpha : A \to B$ сюрьективна (соотв. инъективна) $\iff$ $\operatorname{im} \alpha = B$ (соотв. $\operatorname{coim} \alpha = A$) $\iff$ $\operatorname{coker} \alpha = 0$ (соотв. $\ker \alpha = 0$) **з)** образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны **и)** для любой пары объектов X, Y каноническая стрелка $\iota : X \otimes Y \to X \times Y$ обратима, и диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rrr, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & & & Y \\ X \times X \arrow[r, "\varphi\times\psi"] & Y \times Y \arrow[rr, "\iota^{-1}"] & & Y \otimes Y \arrow[u, "\nabla_Y"'] \end{tikzcd}$$

задаёт на $\mathrm{Hom}(X, Y)$ структуру абелевой группы, делающую $\mathcal{C}$ аддитивной категорией.

ГА3½◇3 (электрификация). Покажите, что абелева категория с генератором умеренно мощна[5].

ГА3½◇4. Покажите, что в категории правых модулей над ассоциативным кольцом R с единицей:

- **а)** абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе, является инъективным когенератором
- **б)** модуль P конечно порождён и проективен если и только если канонический морфизм $\mathrm{End}(P)$-бимодулей $P \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_R(P, R) \to \mathrm{End}(P)$, $p \otimes \xi \mapsto (x \mapsto p \cdot \xi(x))$, эпиморфен
- **в)** компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости.

ГА3½◇5. Полная умеренно мощная абелева категория называется *гротендиковой*, если в ней выполнена дополнительная аксиома: (A4) для любых объекта X, подобъекта $B \subset X$ и линейно упорядоченного по включению семейства подобъектов $A_i \subset X$ справедливо равенство $B \cap (\bigcup A_i) = \bigcup (B \cap A_i)$. Покажите, что категории модулей над ассоциативными кольцами и категория функторов из произвольной абелевой категории в абелевы группы гротендиковы.

ГА3½◇6. Покажите, что в гротендиковой категории с генератором **а)** у любого объекта имеется такое инъективное расширение, которое вкладывается во все остальные инъективные расширения **б)** есть инъективный когенератор.

---

[1] Рассматриваемыми как категории.
[2] В частности, существуют все конечные (ко)пределы, например, послойные (ко)произведения.
[3] Он называется *образом* $\operatorname{im} \alpha$.
[4] Он называется *кообразом* $\operatorname{coim} \alpha$.
[5] Т. е. подобъекты любого объекта составляют множество

Персональный табель ______________________________________. **Листок № 3½ (необязательный)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
и			
3			
4а			
б			
в			
5			
6а			
б			