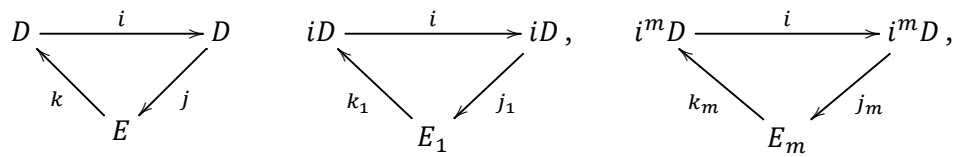


**Спектральные последовательности**

**ГА5♦1.** Точная диаграмма модулей слева называется *точной парой*, а средняя диаграмма



где  $E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ker jk / \text{im } jk$ ,  $j_1 : i(x) \mapsto j(x)$ ,  $k_1 : [x] \mapsto k(x)$ , называется её *производной*. Покажите, что что:

- а)  $E_1, j_1, k_1$  определены корректно и производная тоже является точной парой
- б)  $E_1 \simeq k^{-1}(\text{im } i) / j(\ker i)$
- в)  $m$ -тая производная пара, изображённая справа, имеет  $E_m \simeq k^{-1}(\text{im } i^m) / j(\ker i^m)$ ,  $k_m : [x] \mapsto k(x)$  и  $j_m = ji^{-m} : i^m(x) \mapsto j(x)$ .

**ГА5♦2.** Пусть модули в исходной точной паре биградуированы:  $D = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} D^{p,q}$ ,  $E = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E^{p,q}$ , а мор-

физмы однородны бистепени  $|i| = (-1, 1)$ ,  $|j| = (0, 0)$ ,  $|k| = (1, 0)$ . Разместим модули  $E^{p,q}$  в клетки таблицы  $E_1$ , а их последовательные производные — в следующие таблицы  $E_2, E_3, \dots$ . Убедитесь, что получится спектральная последовательность с  $E_r^{p,q} \simeq k^{-1}(i^{r-1}D^{p+r-1, q-r+1}) / j(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}}))$  и  $d_r = j_{r-1}k_{r-1} = ji^{1-r}k : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ , переводящим класс  $[e]$ , такой что  $k(e) = i^{r-1}(x)$ , в  $[j(x)]$ .

**Предел.** Пусть  $\forall p, q$  существует такое  $N = N(p, q)$ , что входящий в клетку  $(p, q)$  и выходящий из клетки  $(p, q)$  дифференциалы во всех таблицах  $E_r^{p,q}$  с  $r > N$  зануляются, так что корректно определены  $E_\infty^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} E_{N+1}^{p,q} = E_{N+2}^{p,q} = \dots$ . Если существуют модули  $E_\infty^n$  с такими убывающими фильтрациями  $F^p E_\infty^n$ , что  $E_\infty^n = \bigcup_p F^p E_\infty^n$ ,  $\bigcap_p F^p E_\infty^n = 0$  и  $F^p E_\infty^n / F^{p+1} E_\infty^n = E_\infty^{n-p}$ , то говорят, что  $E_r^{p,q}$  сходятся к  $E_\infty^n$  и пишут  $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$ .

**ГА5♦3.** Пусть каждый член  $K^m$  комплекса  $\dots \rightarrow K^m \rightarrow K^{m+1} \rightarrow \dots$  снабжён конечной убывающей фильтрацией  $K^m = F^0 K^m \supset F^1 K^m \supset F^2 K^m \supset \dots \supset 0$  с  $d(F^p K^m) \subset F^p K^{m+1}$  при всех  $p, m$ , так что при каждом  $p$  имеется подкомплекс  $F^p K \subset K$  вида  $\dots \rightarrow F^p K^m \rightarrow F^p K^{m+1} \rightarrow \dots$  и точная тройка комплексов

$$0 \longrightarrow F^{p+1}K \xrightarrow{l} F^p K \xrightarrow{\pi} \text{Gr}^p K \longrightarrow 0. \tag{1}$$

где  $\text{Gr}^p K \stackrel{\text{def}}{=} F^p K / F^{p+1} K$ . Покажите, что а) модули  $D^{p,q} = H^{p+q}(F^p K)$ ,  $E^{p,q} = H^{p+q}(G^p K)$  и морфизмы  $l_* : H^{p+q}(F^{p+1} K) \rightarrow H^{p+q}(F^p K)$ ,  $\pi_* : H^{p+q}(F^p K) \rightarrow H^{p+q}(\text{Gr}^p K)$ ,  $\delta : H^{p+q}(\text{Gr}^p K) \rightarrow H^{p+q}(F^{p+1} K)$  из длинной точной последовательности когомологий точной тройки (1) организуются в биградуированную точную пару, как в **зад. ГА5♦2 б)** в её спектральной последовательности  $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p)$ ,

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q}} \simeq \frac{A_r^{p,q} + F^{p+1}K^{p+q}}{dA_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + F^{p+1}K^{p+q}} \simeq \frac{A_r^{p,q}}{dA_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} + A_{r-1}^{p+1, q-1}}, \quad \text{где}$$

$$A_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in F^p K^{p+q} \mid dx \in F^{p+r} K^{p+q+1}\}, \quad Z_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \pi A_r^{p,q} \subset \text{Gr}^p K^{p+q}, \quad B_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \pi dA_{r-1}^{p-r+1, q+r-2} \subset \text{Gr}^p K^{p+q}$$

в) эта спектралка сходится к присоединённым факторам убывающей фильтрации на когомологиях  $H(K)$ , имеющей в качестве  $F^p H(K)$  коциклы, лежащие в  $F^p K$ , по модулю лежащих в  $F^p K$  кограниц.

**ГА5♦4.** Рассмотрите на тотальном комплексе  $\text{Tot}(K)$  бикомплекса  $K = \bigoplus K^{p,q}$  две фильтрации  ${}^I F$  и  ${}^II F$  с  ${}^I F^p \text{Tot}^m(K) = \bigoplus_{v \geq p, p+q=n} K^{p,q}$  и  ${}^II F^q \text{Tot}^m(K) = \bigoplus_{v \geq q, p+q=n} K^{p,q}$  и получите две спектралки:  ${}^I E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(K))$  с  ${}^I E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$  и  ${}^II E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(K))$  с  ${}^II E_2^{p,q} = H_{d_2}^q(H_{d_1}^p(K))$ .

**ГА5♦5.** Пусть комплекс модулей  $K$  имеет единственный ненулевой модуль когомологий  $H_0(K) = M$ . Покажите, что

- а) если модуль  $N$  таков, что  $\text{Ext}^v(K_i, N) = 0$  при всех  $i$  и  $v \geq 1$ , то  $\text{Ext}^m(M, N) = H^m(\text{Hom}(K, N))$
- б) если модуль  $N$  таков, что  $\text{Tor}_v(K_i, N) = 0$  при всех  $i$  и  $v \geq 1$ , то  $\text{Tor}_m(M, N) = H^m(K \otimes N)$ .

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
в			
4			
5			