Логика и индукция

Задача 1. Каково количество дизъюнктивных нормальных форм[1] от n переменных?

Задача 2. Подсчитайте количество:

а) всех бинарных логических операций

б) таких бинарных логических операций $*$, что $p * q$ не зависит от p

в) таких бинарных операций $\star$, что $r \star r = \neg r$?

г) всех булевых функций от n пременных

д) симметричных булевых функций от n переменных

Задача 3. Всякая ли булева функция является многочленом относительно операций сложения по модулю два и конъюнкции?

Задача 4. Верно ли, что непостоянная функция $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$, задаваемая формулой, содержащей только константы, переменные и сложение по модулю 2, принимает значения 0 и 1 одинаковое число раз?

Задача 5*. Верно ли утверждение, обратное к предыдущему?

Задача 6. На доске написана последовательность из ста плюсов и минусов. В этой последовательности разрешается заменять на противоположный или самый левый знак или знак, стоящий справа от самого левого плюса. Например, в последовательности $--++--+\cdots$ можно поменять на противоположный первый или четвёртый слева знак. Можно ли при помощи таких замен получить из любой последовательности любую другую?

Задача 7. Верно ли, что при любом $n \in \mathbb{N}$ сумма $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ делится на 133?

Задача 8. Верно ли, что $\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n} < 2$ при любом $n \in \mathbb{N}$?

Задача 9. Верно ли, что для любого $n \geqslant 3$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей вида[2] $1/q$ с $q \in \mathbb{N}$?

Задача 10. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся окружностей, каждые две из которых пересекаются по паре различных точек, но пересечение любых трёх пусто?

Задача 11. На сколько частей разбивают пространство n плоскостей, никакие две из которых не параллельны, никакие три не пересекаются по одной прямой, и никакие четыре не пересекаются в одной точке?

[1] То есть булевых многочленов, в которых роль сложения играет дизъюнкция, а умножения — конъюнкция, и всякий моном состоит из конъюнкции некоторых переменных либо их отрицаний.

[2] Например, для $n = 3$ имеем $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.