Эквивалентности и порядки

Листок считается сданным, если решено не менее восьми задач.

Задача 1. Вычислите композицию $S \circ T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ отношений $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y/(y^3+1)\}$ и $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2/(y^3+1)\}$ на множестве $\mathbb{R}$ и изобразите её на плоскости $\mathbb{R}^2$. Задаётся ли получившаяся фигура одним уравнением?

Задача 2. Рассмотрим на множестве треугольников в $\mathbb{R}^2$ отношение $T_1 \sim T_2$, означающее, что T_1 получается из T_2 **а)** параллельным переносом **б)** движением[1] **в)** собственным[2] движением **г*)** гомотетией **д*)** преобразованием подобия[3] **е*)** аффинным преобразованием[4]. Выясните, являются ли оно эквивалентностью, и если нет, явно опишите порождённую им эквивалентность. В каждом случае опишите фактор множества треугольников по возникающей эквивалентности.

Задача 3. Верно ли, что $S \circ S = S$ для любой эквивалентности S?

Задача 4. Скажем, что одна прямоугольная коробка меньше другой, если одно из трёх её измерений меньше одного из трёх измерений второй коробки. Транзитивно ли это отношение?

Задача 5. Всякое антисимметричное транзитивное отношение на множестве M называется *предпорядком*. Свяжем с предпорядком $\preccurlyeq$ отношение $x \sim y$, означающее, что одновременно $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$. Покажите, что это эквивалентность, и что на факторе по ней отношение «класс $x \leqslant$ класса y, если $x \preccurlyeq y$» корректно задаёт частичный порядок.

Задача 6. Каким условиям должны удовлетворять эквивалентность $\sim$ и частичный порядок $\leqslant$ на множестве M, чтобы отношение $x \leqslant y$ корректно задавало порядок на факторе $M/\sim$? Индуцирует ли естественный порядок на $\mathbb{Z}$ какой-нибудь порядок на $\mathbb{Z}/(2)$ или на $\mathbb{Z}/(3)$?

Задача 7. Частичный порядок называется *линейным* (или просто *порядком*), если любые два элемента сравнимы. Покажите, что всякий частичный порядок на конечном множестве может быть расширен до линейного порядка.

Задача 8. По заданному линейному порядку на M постройте линейный порядок на множестве $M^n = M \times M \times \ldots \times M$, аналогичный упорядочению слов по алфавиту. Для порядка на плоскости $\mathbb{R}^2$, возникающего таким образом из стандартного порядка на $\mathbb{R}$, нарисуйте множество

$$\{p \in \mathbb{R}^2 \mid (1,2) \leqslant p \leqslant (2,1)\}.$$

Стандартные аббревиатуры: чум — частично упорядоченное множество, лум — линейно упорядоченное множество, вум — *вполне упорядоченное множество* — это лум, в котором каждое непустое подмножество имеет минимальный элемент (см. ниже).

чумовая **терминология**. Элемент p чума P называется *верхней* (соотв. *нижней*) *гранью* подмножества $X \subset P$, если $\forall\, x \in X\ x \leqslant p$ (соотв. $p \leqslant x$). Элемент $x^* \in X$ (соотв. $x_* \in X$) называется *максимальным* (соотв. *минимальным*) в X, если неравенство $x^* \leqslant x$ (соотв. $x \leqslant x_*$) на $x \in X$ выполняется только при $x = x^*$ (соотв. $x = x_*$). чум P называется *полным*, если каждое линейно упорядоченное подмножество (лум) $L \subset P$ имеет верхнюю грань.

Задача 9. Приведите пример **а)** чума без максимального элемента **б)** бесконечного полного чума **в)** бесконечного вума, отличного от $\mathbb{N}$ **г)** чума с несколькими различными максимальными элементами **д)** максимального элемента, не являющегося верхней гранью. **е)** Возможны ли последние два явления в луме?

Задача 10 (трансфинитная индукция). Пусть некоторое утверждение $\Upsilon = \Upsilon(w)$ зависит от элемента w вума W, причём $\Upsilon(w_*)$ верно для минимального элемента $w_* \in W$, и $\forall\, x \in W$ из того, что $\Upsilon(w)$ верно для всех $w < x$, вытекает, что верно $\Upsilon(x)$. Докажите, что $\Upsilon(w)$ верно для всех $w \in W$.

---

[1] Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками.

[2] Движение называется *собственным*, если оно сохраняет ориентацию.

[3] Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *преобразованием подобия*, если существует такое ненулевое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $|a, b| = \lambda |f(a), f(b)|$ для любых двух точек $a, b \in \mathbb{R}^2$, где $|a, b|$ означает расстояние между точками a и b.

[4] Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *аффинным преобразованием*, если оно переводит прямые в прямые.