

Примеры линейных представлений

- ТП5♦1.** Найдите в $\text{Mat}_6(\mathbb{R})$ все ассоциативные \mathbb{R} -подалгебры с единицей размерности > 31 .
- ТП5♦2.** Приведите пример неразложимого а) приводимого представления аддитивной группы \mathbb{Z} б) представления конечной группы, имеющего ненулевые инварианты.
- ТП5♦3.** Пусть конечная группа G действует на $V = \mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов. Как связано значение характера¹ $\chi_V(g)$ с числом неподвижных точек перестановки g ?
- ТП5♦4.** Выразите через характеры χ_U и χ_W представлений U и W конечной группы G характер представления а) $U \oplus W$ б) $U \otimes W$ в) U^* г) $\text{Hom}(U, W)$ д*) $\chi_{\Lambda^2 U}$ е*) $\chi_{S^2 U}$.
- ТП5♦5.** Покажите, что а) $\chi_{S^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) + \chi_U(g^2))/2$ б) $\chi_{\Lambda^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) - \chi_U(g^2))/2$.
- ТП5♦6*.** Пусть V — двумерное неприводимое представление группы S_3 . а) Верно ли, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где R — регулярное представление? б) Разложите все $S^n(V)$ в сумму неприводимых представлений. в) Опишите подалгебру S_3 -инвариантов в алгебре SV . г) Вычислите характеры всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые. д) Покажите, что $S^2(S^3(V)) \simeq S^3(S^2(V))$ е) Изоморфны ли $S^k(S^m(V))$ и $S^m(S^k(V))$ при всех k, m ?
- ТП5♦7.** Опишите все неприводимые представления группы диэдра D_n и их характеры.
- ТП5♦8.** Вычислите характеры следующих представлений группы S_4 : тривиального, знакового, 2-мерного посредством эпиморфизма на группу треугольника и двух 3-мерных — собственной группой куба и несобственной группой тетраэдра. Есть ли среди них приводимые? А изоморфные? Перечислите неприводимые представления S_4 и разложите их на неприводимые представления подгруппы $S_3 = \text{Stab}(4) \subset S_4$.
- ТП5♦9.** Перечислите неприводимые представления группы A_4 , вычислите их характеры и выясните, как неприводимые представления S_4 раскладываются на неприводимые при ограничении на A_4 .
- ТП5♦10.** Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве \mathbb{C} -значных функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней.
- ТП5♦11.** На гранях куба написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 — как на игральной кости. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел с четырёх соседних граней. Вычислите с точностью до 10^{-3} , что будет написано на гранях после 2023 ходов. Зависит ли ответ от начальной расстановки чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6?
- ТП5♦12.** Найдите размерности, характеры и разложения на приводимые представления для следующих представлений группы S_5 : а) тривиального U , знакового U' , симплициального V , $V' = V \otimes U'$, $\Lambda^2 V$, $S^2 V$ б*) представления посредством изоморфизма² $S_5 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ в пространстве W функций $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5) \rightarrow \mathbb{C}$ с нулевой суммой значений, а также представлений $W' = W \otimes U'$, $S^2 W$, $\Lambda^2 W$, $V \otimes W$.
- ТП5♦13.** Опишите все неприводимые представления группы A_5 , вычислите их характеры и выясните, как раскладываются при ограничении на A_5 неприводимые представления S_5 .
- ТП5♦14.** Составьте таблицы неприводимых характеров группы: а) кватернионных единиц б*) $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ в*) верхних унитарных матриц $H(\mathbb{F}_3) \subset \text{SL}_3(\mathbb{F}_3)$ над полем \mathbb{F}_3 .

¹Характером линейного представления $\rho : M \rightarrow \text{End}(V)$ множества операторов M в конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{k} называется функция $\chi_V : M \rightarrow \mathbb{k}$, $g \mapsto \text{tr } \rho(g)$.

²Действие группы $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на шести точках проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ задаёт вложение $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \hookrightarrow S_6$. Изоморфизм $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$ задаётся действием $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ левыми умножениями на множестве левых смежных классов $S_6/\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
е			
5а			
б			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
7			
8			
9			
10а			
б			
в			
11			
12а			
б			
13			
14а			
б			
в			