Представления симметрических групп.

Обозначения. $C_\mu \subset S_n$ означает множество перестановок циклового типа μ, $z_\mu \overset{\text{def}}{=} n!/|C_\mu| = \prod_i i^{m_i} m_i!$, где $m_i = m_i(\mu)$ — число строк длины i в μ. С каждым стандартным заполнением T диаграммы λ веса n связаны подгруппы $R_T, C_T \subset S_n$, нормализующие все строки (соотв. все столбцы) заполнения T. Мы полагаем $r_T \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in R_T} g$, $c_T \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in C_T} \operatorname{sgn}(g)\, g$, $s_T \overset{\text{def}}{=} r_T c_T$, $V_\lambda \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}[S_n]\, s_T \subset \mathbb{C}[S_n]$, $M_\lambda = \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$.

ТП7◇1. Приведите в точное соответствие со стандартными представлениями V_λ неприводимые представления групп **а)** S_4 из зад. ТП5◇8 **б)** S_5 из зад. ТП5◇13.

ТП7◇2. Верно ли, что **а)** $\mathbb{C}[S_n]\, s_T \subset \mathbb{C}[S_n]\, r_T$? **б)** представления группы S_n левыми умножениями в идеалах $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$ и $\mathbb{C}[S_n]\, c_T$ индуцированы, соответственно, тривиальным и знаковым представлениями подгрупп R_T и C_T?

ТП7◇3. Покажите, что $[V_\nu] \cdot [V_{(1^n)}] = \sum_\mu [V_\mu]$, где μ пробегает диаграммы, полученные добавлением n клеток к ν так, чтобы никакие две не попали в одну строку.

ТП7◇4. Покажите, что M_λ и $M_\lambda \otimes V_{(1^n)}$ имеют единственное общее неприводимое слагаемое, и оно изоморфно V_λ.

ТП7◇5. Покажите, что неприводимое представление V_μ группы S_m входит в разложение представления, индуцированного неприводимым представлением V_ν подгруппы $S_n \subset S_m$, если и только если $\mu \supset \nu$, и его кратность равна числу стандартных возрастающих по строкам и столбцам заполнений косой диаграммы $\mu \smallsetminus \nu$.

ТП7◇6. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение про ограничения неприводимых представлений.

ТП7◇7. С какой кратностью входят в индуцированное одномерным представлением максимального цикла умножением на $e^{2\pi i/n}$ **а)** знаковое **б)** симплициальное представления?

ТП7◇8. Покажите, что значение неприводимого характера χ_λ группы S_n на максимальном цикле равно **а)** $(-1)^k$ для $\lambda = \big((n-k),\, 1^k\big)$ **б)** 0 для всех прочих λ.

ТП7◇9. Покажите, что **а)** V_λ входит в $V_\mu \otimes V_\nu$ с кратностью $\sum_\eta z_\eta^{-1} \chi_\lambda(C_\eta)\chi_\mu(C_\eta)\chi_\nu(C_\eta)$ причём эта кратность равна **б)** $\delta_{\mu,\nu}$ для $\lambda = (n)$ **в)** δ_{μ,ν^t} для $\lambda = (1^n)$.

ТП7◇10. Покажите, что $\operatorname{res}_{A_n}^{S_n} V_\lambda$ **а)** неприводимо при $\lambda \neq \lambda^t$ **б)** при $\lambda = \lambda^t$ является суммой двух не изоморфных неприводимых представлений, получающихся друг из друга композицией с автоморфизмом сопряжения $\operatorname{Ad}_\sigma : A_n \xrightarrow{\sim} A_n$, $g \mapsto \sigma g \sigma^{-1}$, где $\sigma \in S_n \smallsetminus A_n$ — произвольная нечётная перестановка. **в)** Опишите представления S_n, индуцированные этими неприводимыми представлениями A_n **г)** Все ли неприводимые представления A_n такие?

ТП7◇11. Докажите, что $\dim V_\lambda < |\lambda|$ только у тривиального, знакового, симплициального и тензорного произведения симплициального и знакового представлений, а также у представления $V_{(2,2)}$ группы S_4 и представлений $V_{(2,2,2)}$ и $V_{(3,3)}$ группы S_6.

ТП7◇12* (формула крюков). Докажите, что $\dim V_\lambda = n!/\prod_{a \in \lambda} \Gamma(a)$, где $n = |\lambda|$, а $\Gamma(a)$ — количество клеток в крюке, образованном клеткой $a \in \lambda$ и всеми клетками под ней в том же столбце и справа от неё в той же строке.

ТП7◇13*. Пусть диаграмма $\lambda = \lambda^t$ образована k симметричными крюками с вершинами на главной диагонали и строго убывающими длинами $\gamma_i = 2(\lambda_i - i + 1) - 1$, где $1 \leqslant i \leqslant k$. Покажите, что $\chi_\lambda(C_\gamma) = (-1)^{(n-k)/2}$.

ТП7◇14*. Установите для $(n-1)$-мерного симплициального представления V_Δ группы S_n изоморфизмы **а)** $\Lambda^k V_\Delta \simeq V_{((n-k),\,1^k)}$ **б)** $V_\Delta^{\otimes 2} \simeq \mathbb{C} \oplus V_\Delta \oplus V_{((n-2),2)} \oplus V_{((n-2),1,1)}$.

ТП7◇15*. Покажите, что **а)** $\chi_{((n-2),1,1)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} - m_2$ **б)** $\chi_{((n-2),2)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} + m_2 - 1$

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (25.04.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8а			
б			
9а			
б			
в			
10а			
б			
в			
г			
11			
12			
13			
14а			
б			
15а			
б			