Сопряжённые функторы и копределы.

ГА2◇1. Два контравариантных функтора $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*), если имеется функториальная по $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ биекция $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(D), C\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(C), D\big)$ (соотв. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(C, G(D)\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(D, F(C)\big)$). Сформулируйте и докажите для таких функторов аналоги двух утверждений из зад. SHA1◇8.

ГА2◇2. Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, если и только если существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции[1] $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ равны[2] тождественным эндоморфизмам функторов F и G.

ГА2◇3. Покажите, что для козамкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

ГА2◇4. Пусть R — произвольное кольцо с единицей, и подмножество $S \subset R$ таково, что $1 \in S$, $s, t \in S \Rightarrow st \in S$ и выполнены *условия Оре*: (O_1) $\forall\, \lambda \in R\ \forall\, s \in S\ \exists\, \varrho \in R\ \exists t \in S$: $\lambda s = t\varrho$ (O_2) $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ из $\exists\, s \in S$: $\lambda_1 s = \lambda_2 s$ следует, что $\exists\, t \in S$: $t\lambda_1 = t\lambda_2$. Превратим S в категорию, полагая $\mathrm{Hom}_S(s,t) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od\text{-}K$, отправляя объект $s \in S$ в свободный правый R-модуль ранга один, базисный вектор в котором обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а стрелку $\lambda \in \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм $\left[\frac{1}{s_1}\right] \mapsto \left[\frac{1}{s_2}\right] \cdot \lambda$. Покажите, что копредел этого функтора это *модуль левых дробей* $S^{-1}R$ образованный классами пар $s^{-1}\varrho$ по отношению $s_1^{-1}\varrho_1 \sim s_2^{-1}\varrho_2$, означающему существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$. Проверьте, что это отношение эквивалентности и задайте на $S^{-1}R$ структуру кольца с единицей.

ГА2◇5 (точные функторы). Функтор $F : \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$ (соотв. $\mathcal{A}b^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра. Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что: **а)** для фиксированной группы $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}b$ функтор $X \mapsto X \bigotimes_{\mathbb{Z}} N$ точен справа, и предъявите группу N, для которой он не точен слева **б)** для фиксированной фильтрующейся категории $\mathcal{N}$ функтор $\operatorname{colim}_{\mathcal{N}} : \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A}b) \to \mathcal{A}b$ точен[3].

ГА2◇6. Покажите, что последовательность $0 \to F \to G \to H \to 0$ пучков абелевых групп на топологическом пространстве X точна в категории пучков, если и только если для каждой точки $x \in X$ последовательность слоёв $0 \to F_x \to G_x \to H_x \to 0$ точна в категории абелевых групп.

ГА2◇7. Покажите что тавтологическое вложение категории пучков абелевых групп в категорию предпучков абелевых групп на топологическом пространстве является точным слева функтором, но не точно справа.

ГА2◇8. Покажите, что функтор $\Gamma : \mathcal{T}op(X) \to pSh(X)$ сопоставляющий непрерывному отображению $E \to X$ пучок его локальных сечений, сопряжён справа функтору $\mathcal{E} : pSh(X) \to \mathcal{T}op(X)$, сопоставляющему предпучку множеств F на X его этальное пространство $\mathcal{E}_F = \coprod_{x\in X} F_x$ со слабейшей топологией, в которой все сечения $s : U \to \mathcal{E}_F$, $x \mapsto$ (класс s в F_x), непрерывны для всех $s \in F(U)$ и всех U.

---

[1]где $(F \circ s)_X \overset{\mathrm{def}}{=} F\left(s_X\right)$, $(t \circ F)_X \overset{\mathrm{def}}{=} t_{F(X)}$ и т. д.

[2]именно равны, а не просто эквивалентны

[3]Ядро и коядро естественного преобразования диаграмм $f : X \to Y$ образованы, соответственно, ядрами и коядрами стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Проверьте, что стрелки $X(\mu \to \nu)$ и $Y(\mu \to \nu)$ корректно задают гомоморфизмы этих групп, и эти гомоморфизмы образуют диаграммы $\ker f : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ и $\operatorname{coker} f : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$.

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (18 сентября 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8			