

Точные категории⁰

ГАЗ¹/₂◊1. Пусть категория \mathcal{E} имеет нулевой¹ объект 0 и ядра и коядра всех морфизмов². Для произвольной стрелки $\varphi : X \rightarrow Y$ положим $\text{im } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \ker(Y \rightarrow \text{coker } \varphi)$ и $\text{coim } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker}(\ker \varphi \rightarrow X)$.

Покажите, что φ функториально раскладывается в композицию $X \rightarrow \text{coim } \varphi \rightarrow \text{im } \varphi \rightarrow Y$.

Точные категории. Категория \mathcal{E} называется *точной*, если она удовлетворяет условиям зад. ГАЗ¹/₂◊1 и канонический морфизм $\text{coim } \varphi \rightarrow \text{im } \varphi$ является изоморфизмом для всех $\varphi \in \text{Mor } \mathcal{E}$. Композиция $\varphi\psi$ называется *точной*, если $\ker \varphi = \text{im } \psi$. Всё дальнейшее происходит в точной категории.

ГАЗ¹/₂◊2. Для коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 \\ \downarrow \xi & & \downarrow \eta & & \downarrow \zeta \\ X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 \end{array}$$

покажите, что: а) если $\ker \alpha_1 = \ker \alpha_2 = 0$, то последовательность $0 \rightarrow \ker \xi \rightarrow \ker \eta \rightarrow \ker \zeta$ точна б) если $\text{coker } \xi = \text{coker } \beta_1 = \text{coker } \beta_2 = 0$, то $\text{coker } \eta \simeq \text{coker } \zeta$, последовательность $X_2 \rightarrow \text{im } \eta \rightarrow \text{im } \zeta$ точна, $\text{im } \zeta = \text{coker}(\ker \eta \rightarrow Z_1)$, и $\text{coker}(\ker \eta \rightarrow \ker \zeta) = 0$.

ГАЗ¹/₂◊3. Покажите, что коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & D_2 \end{array}$$

при $\text{coker } \alpha = 0$ функториально производит точную последовательность $\ker \beta \rightarrow \ker \gamma \rightarrow \ker \delta$, а при $\ker \beta = 0$ — точную последовательность $\text{coker } \alpha \rightarrow \text{coker } \beta \rightarrow \text{coker } \gamma$.

ГАЗ¹/₂◊4. Покажите, что любая композиция $\varphi\psi$ порождает длинную точную последовательность $0 \rightarrow \ker \psi \rightarrow \ker \varphi\psi \rightarrow \ker \varphi \rightarrow \text{coker } \psi \rightarrow \text{coker } \varphi\psi \rightarrow \text{coker } \varphi \rightarrow 0$.

ГАЗ¹/₂◊5. В коммутативной диаграмме с точными строками и $\text{coker } \alpha = \ker \varepsilon = 0$

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & E_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & E_2 \end{array} \tag{1}$$

положим $K \stackrel{\text{def}}{=} \ker(C_1 \rightarrow D_2)$ и $\bar{K} \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker}(B_1 \rightarrow C_2)$. Постройте естественные а) изоморфизмы $K \simeq \ker \delta$ и $\text{coker } \beta \simeq \bar{K}$ б) такую стрелку $\partial : \ker \delta \rightarrow \text{coker } \beta$, чтобы совпадали композиции $K \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \bar{K}$ и $K \rightarrow \ker \delta \xrightarrow{\partial} \text{coker } \beta \rightarrow \bar{K}$, и докажете, что она единственна в) длинную точную последовательность $\ker \beta \rightarrow \ker \gamma \rightarrow \ker \delta \rightarrow \text{coker } \beta \rightarrow \text{coker } \gamma \rightarrow \text{coker } \delta$.

ГАЗ¹/₂◊6. Покажите, что в диаграмме (1) обратимость стрелок $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ влечёт обратимость γ .

ГАЗ¹/₂◊7. Для комплекса³ $C : \dots \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots$ положим $Z^i \stackrel{\text{def}}{=} \ker d^i, \bar{Z}^i \stackrel{\text{def}}{=} \text{coker } d^{i-1}, H^i \stackrel{\text{def}}{=} Z^i / \text{im } d^{i-1}$. Убедитесь, что d^n задаёт стрелку $\bar{Z}^n \rightarrow Z^{n+1}$, и для точной последовательности комплексов $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ постройте функториальную точную последовательность $H^n(A) \xrightarrow{H^n(\alpha)} H^n(B) \xrightarrow{H^n(\beta)} H^n(C) \xrightarrow{H^n(\delta^n)} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H^{n+1}(\alpha)} H^{n+1}(B) \xrightarrow{H^{n+1}(\beta)} H^{n+1}(C) \rightarrow 0$.

⁰Подсказки ко всем задачам есть в первой главе книги: B. Iversen. «Cohomology of sheaves».

¹т. е. одновременно начальный и конечный

²т. е. (ко)уравнители стрелок $X \rightarrow Y$ с нулевой стрелкой $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$

³это значит, что $d^i d^{i-1} = 0$ при всех i

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
3			
4			
5а			
б			
в			
6			
7			