

**Комплексы и когомологии**

ГАЗ◊1. Рассмотрим комплексы (левых) модулей над кольцом с единицей и обозначаем через  $\text{Hom}_{\text{DG}}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_i \text{Hom}^i(A, B)$  комплекс с компонентами  $\text{Hom}^i(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_\nu \text{Hom}(A^\nu, B^{\nu+i})$  и дифференциалом  $d : \psi \mapsto d_B \psi - (-1)^{|\psi|} \psi d_A$ , через  $\text{Hom}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d \cap \text{Hom}_{\text{DG}}^0(A, B)$  — ядро этого дифференциала в нулевой компоненте, а через  $\text{Hom}_{\mathcal{H}o}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=}} H^0(\text{Hom}_{\text{DG}}(A, B)) = \text{Hom}(A, B) / \text{im } d$  — нулевую компоненту когомологий. Покажите, что а) комплексы с группами  $\text{Hom}$  в качестве морфизмов образуют абелеву категорию<sup>1</sup> б) комплексы с группами  $\text{Hom}_{\text{DG}}$  в качестве морфизмов образуют DG-катеорию<sup>2</sup> в) комплексы с группами  $\text{Hom}_{\mathcal{H}o}$  в качестве морфизмов образуют категорию<sup>3</sup> г) любой  $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$  корректно задаёт гомоморфизм  $\varphi_* : H(A) \rightarrow H(B)$  д) если  $\varphi = \psi$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{H}o}(A, B)$ , то  $\varphi_* = \psi_*$  е) функторы когомологий перестановочны с копределами фильтрующихся диаграмм в  $\mathcal{C}om$ .

ГАЗ◊2. В категории  $\mathcal{C}om$  постройте на каждом комплексе  $K$  функториальную по  $K$  убывающую фильтрацию подкомплексами  $\dots \supset F^i \supset F^{i+1} \supset \dots$ , каждый присоединённый фактор которой  $G^i = F^i / F^{i+1}$  имеет единственный ненулевой модуль когомологий, причём последний располагается в степени  $i$  и равен а)  $K^i$  б)  $H^i(K)$ .

ГАЗ◊3. Функция  $\alpha : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow A$  из объектов абелевой категории  $\mathcal{A}$  в абелеву группу  $A$  называется *аддитивной*, если для любой точной тройки  $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$  в категории  $\mathcal{A}$  в группе  $A$  выполняется соотношение  $\alpha(L) = \alpha(K) + \alpha(M)$ . Докажите для любой аддитивной функции  $\alpha$  и любого ограниченного<sup>4</sup> комплекса  $K$  формулу Эйлера  $\sum (-1)^i \alpha(K^i) = \sum (-1)^i \alpha(H^i(K))$ .

ГАЗ◊4. В условиях зад. ГАЗ◊1 функториально сопоставьте точной тройке  $0 \rightarrow K \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$  в  $\mathcal{C}om$  точную последовательность  $\dots \rightarrow H^i(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^i(L) \xrightarrow{\psi_*} H^i(M) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(L) \rightarrow \dots$ .

ГАЗ◊5. Для конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  и ненулевого ковектора  $\xi \in V^*$  вычислите когомологии комплексов  $\Lambda V$  и  $\Lambda V^*$  с дифференциалами<sup>5</sup>

$$\partial_\xi : \Lambda^m V \rightarrow \Lambda^{m-1} V, \quad \eta \mapsto \partial_\xi \eta \quad \text{и} \quad \xi : \Lambda^m V^* \rightarrow \Lambda^{m+1} V^*, \quad \omega \mapsto \xi \wedge \omega.$$

ГАЗ◊6. Выберем в пространстве  $V$  базис, обозначим через  $x_i$  и  $\xi_i$  образы базисных векторов в алгебрах  $S V$  и  $\Lambda V$  и рассмотрим следующие эндоморфизмы векторного пространства  $S V \otimes \Lambda V$ :

$$\partial = \sum x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} : \Lambda^k V \otimes S^m V \rightarrow \Lambda^{k-1} V \otimes S^{k+1} V, \quad f \otimes \omega \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot f \otimes \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i},$$

$$d = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} : \Lambda^k V \otimes S^m V \rightarrow \Lambda^{k+1} V \otimes S^{k-1} V, \quad f \otimes \omega \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \otimes \xi_i \wedge \omega.$$

- а) Покажите, что они не зависят от выбора базиса и  $\partial^2 = d^2 = 0$ .
- б) Вычислите коммутатор  $\partial d + d \partial$  и когомологии обоих дифференциалов.

<sup>1</sup>она называется *категорией комплексов* и обозначается  $\mathcal{C}om$

<sup>2</sup>т. е. дифференциал на  $\text{Hom}_{\text{DG}}$  связан с композицией *формулой Лейбница*:  $d(\varphi\psi) = (d\varphi)\psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi(d\psi)$ ; соответствующая категория называется *DG-категорией комплексов* и обозначается  $\mathcal{C}om_{\text{DG}}$

<sup>3</sup>она называется *гомотопической категорией комплексов* и обозначается  $\mathcal{H}o$

<sup>4</sup>комплекс  $K$  называется *ограниченным сверху* (соотв. *снизу*), если  $K^i = 0$  при всех  $i \gg 0$  (соотв. при всех  $i \ll 0$ ), и просто *ограниченным*, если он ограничен и сверху и снизу

<sup>5</sup>оператор  $\partial_\xi$  переводит  $\omega \in \Lambda^m V$  в образ при проекции  $V^{\otimes(m-1)} \rightarrow \Lambda^{m-1} V$  тензора, полученного свёрткой ковектора  $\xi$  по первому сомножителю с единственным кососимметричным тензором  $\tilde{\omega} \in V^{\otimes m}$  проектирующимся в  $\omega$  при проекции  $V^{\otimes m} \rightarrow \Lambda^m V$

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
е			
2а			
б			
3			
4			
5			
6а			
б			