

Зоология топологических пучков.

все пучки в этом листке суть пучки абелевых групп

Терминология и обозначения. Пусть F — пучок на топологическом пространстве X . Через $s(x)$ обозначается класс сечения $s \in F(U)$ в слое F_x над точкой $x \in U$. *Носителем* пучка F (соотв. сечения $s \in F(U)$) называется множество $\text{supp}(F) = \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$ (соотв. множество $\text{supp}(s) = \{x \in U \mid s(x) \neq 0\}$). Пучок F *допускает разложение единицы*, если для любого сечения $s \in F(U)$ над произвольным открытым $U \subset X$ и любого открытого покрытия $U = \bigcup W_\alpha$ найдутся такие сечения $s_\alpha \in F(U)$ с $\text{supp}(s_\alpha) \subset W_\alpha$, что для каждой точки $x \in U$ лишь конечное число $s_\alpha(x) \neq 0$ и $\sum_\alpha s_\alpha(x) = s(x)$ в F_x . Пучок F на X называется *вялым*, если ограничение $F(X) \rightarrow F(U)$ сюръективно для любого открытого $U \subset X$, *мягким* — если слой F_Z над каждым замкнутым $Z \subset X$ состоит из ростков глобальных сечений, *тонким* — если для любых двух замкнутых подмножеств $Z_1, Z_2 \subset X$ существует эндоморфизм $F \rightarrow F$, тождественный на некотором открытом $U_1 \supset Z_1$ и нулевой на некотором открытом $U_2 \supset Z_2$.

ГА5♦1. Пусть F обладает разложением единицы. Покажите, что любое открытое покрытие X является F -ациклическим и выведите отсюда, что F ацикличесен.

ГА5♦2. Покажите, что а) для точной тройки пучков $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ с вялым F последовательность $0 \rightarrow F(U) \rightarrow G(U) \rightarrow H(U) \rightarrow 0$ точна над любым открытым $U \subset X$ и вялость G влечёт вялость H б) прямой образ вялого пучка вял в) вялый пучок мягок.

ГА5♦3. Покажите, что сопоставление пучку F его *вялой оболочки* Годемана G_F с $G_F(U) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{x \in U} F_x$ является точным функтором из пучков в вялые пучки.

ГА5♦4. Для замкнутого вложения $\iota : Z \hookrightarrow X$ и пучка F на Z покажите, что а) в точке $x \in X$ слой $(\iota_* F)_x$ равен F_x при $x \in Z$ и нулю при $x \notin Z$ б) функтор ι_* точен и $\iota^* \iota_* F \simeq F$ в) $H^n(X, \iota_* F) \simeq H^n(Z, F)$. г) Пусть $\varphi : E \rightarrow G$ — морфизм пучков на X , причём $\text{supp}(G) \subset Z$. Покажите, что φ единственным образом пропускается через канонический морфизм $F \rightarrow \iota_* \iota^* F$.

ГА5♦5. Для открытого вложения $j : U \hookrightarrow X$ покажите, что функтор j^* точен и $j^* j_* = \text{Id}$.

ГА5♦6. Пусть подмножества $Z_1, Z_2 \subset X$ замкнуты, а $U_1, U_2 \subset X$ открыты. Для любого пучка F на X постройте длинные *точные последовательности Майера – Виеториса*:

- а) $\dots \rightarrow H^p(Z_1 \cup Z_2, F) \rightarrow H^p(Z_1, F) \oplus H^p(Z_2, F) \rightarrow H^p(Z_1 \cap Z_2, F) \rightarrow H^{p+1}(Z_1 \cup Z_2, F) \rightarrow \dots$
 б) $\dots \rightarrow H^p(U_1 \cap U_2, F) \rightarrow H^p(U_1, F) \oplus H^p(U_2, F) \rightarrow H^p(U_1 \cup U_2, F) \rightarrow H^{p+1}(U_1 \cap U_2, F) \rightarrow \dots$

ГА5♦7. Пусть X локально компактно¹. Покажите, что а) мягкость пучка равносильна тому, что для любого сечения s над любой открытой окрестностью U любого компакта $Z \subset X$ найдётся глобальное сечение t , совпадающее с s в слоях над всеми точками из некоторого открытого подмножества $W \subset X$, такого что $Z \subset W \subset U$ б) пучок модулей над мягким пучком колец мягок в) пучок непрерывных функций со значениями в \mathbb{R} или в \mathbb{C} мягок г) мягкий пучок допускает разложение единицы д) мягкость — локальное свойство².

ГА5♦8. Пусть X паракомпактно³. Покажите, что а) тонкость F равносильна вялости пучка колец⁴ $\mathcal{H}om(F, F)$, у которого $\mathcal{H}om(F, F)(U) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(F|_U, F|_U)$ б) пучки колец непрерывных (соотв. гладких) функций на вещественном (гладком) многообразии тонкие в) тонкий пучок мягок г) в точной тройке пучков $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ с мягким F мягкость G влечёт мягкость H и последовательность абелевых групп $0 \rightarrow F_Z \rightarrow G_Z \rightarrow H_Z \rightarrow 0$ точна над любым замкнутым $Z \subset X$ д) мягкий пучок допускает разложение единицы е) мягкость и тонкость локальны.

ГА5♦9. Пусть X — гладкое вещественное n -мерное многообразие. Покажите, что: а) пучки дифференциальных p -форм $\Omega^p(X)$ ациклически б) (пучковый) комплекс ДеРама $0 \rightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n \rightarrow 0$ является ациклической резольвентой постоянного пучка \mathbb{R} .

¹т. е. хаусдорфово и у каждой точки есть компактная окрестность

²т. е. мягкость равносильна тому, что у любой точки есть окрестность, ограничение на которую мягко

³т. е. хаусдорфово и в любом открытом покрытии X есть локально конечное подпокрытие

⁴проверьте, кстати, что это пучок

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
3			
4а			
б			
в			
г			
5			
6а			
б			
7а			
б			
в			
г			
д			
8а			
б			
в			
г			
д			
е			
9а			
б			