

Сечения с компактными носителями.

Соглашения, напоминания и обозначения. Все пучки в этом листке суть пучки абелевых групп, а все топологические пространства локально компактны. Непрерывное отображение называется *собственным*, если прообраз любого компакта компактен. Подмножество $W \subset X$ называется *локально замкнутым*, если у каждой точки $w \in W$ есть такая открытая окрестность $U \ni w$ в X , что $U \cap W$ замкнуто в U в индуцированной с X топологии на U . Для пучка F на X мы полагаем¹ $H_c^0(X, F) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in F(X) \mid \text{supp}(s) \text{ компактен}\}$.

ГА6◊1. Для непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ и пучка F на X зададим на Y подпредпучок $f_!F \subset f_*F$ правилом $f_!F(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in F(f^{-1}U) \mid \text{отображение } f|_{\text{supp}(s)} : \text{supp}(s) \rightarrow U \text{ собственное}\}$. Покажите, что: а) $f_!F$ является пучком б) если f — вложение замкнутого подмножества, то $f_! = f_*$ в) функтор $f_! : \mathcal{S}h(X) \rightarrow \mathcal{S}h(Y)$, $F \mapsto f_!F$, точен слева.

ГА6◊2. Пусть $f : W \hookrightarrow X$ — вложение локально замкнутого подмножества и F — пучок на W . Покажите, что: а) слой $f_!F_x = F_x$ при $x \in W$ и нулевой при $x \notin W$ б) функтор $f_!$ точен в) $f^*f_! = \text{Id}_{\mathcal{S}h(W)}$ г) функторы $f_!$ и f^* являются квазиобратными друг другу эквивалентностями между категорией $\mathcal{S}h(W)$ и полной подкатегорией в $\mathcal{S}h(X)$, состоящей из пучков с нулевыми слоями во всех точках $X \setminus W$.

ГА6◊3. В условиях зад. ГА6◊2 для пучка G на X положим $G^W(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in F(U) \mid \text{supp}(s) \subset W\}$ и $h^!G \stackrel{\text{def}}{=} h^*G^W$. Покажите, что а) G^W — пучок на X с нулевыми слоями во всех точках $X \setminus W$ б) функтор $f^!$ сопряжён справа функтору $f_!$ и точен слева в) если W открыто в X , то $h^! = h^*$ г) если W замкнуто в X , то $h^!h_* = \text{Id}_{\mathcal{S}h(W)}$

ГА6◊4. Пусть $i : Z \hookrightarrow X$ и $j : U \hookrightarrow X$ — вложения дополнительных друг к другу замкнутого и открытого множеств, так что $U = X \setminus Z$. Постройте для любого пучка F на X функториальную точную тройку пучков $0 \rightarrow j_!j^*F \rightarrow F \rightarrow i_*i^*F \rightarrow 0$ на X .

ГА6◊5. Для непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ и локально замкнутого вложения $h : W \hookrightarrow Y$ обозначим через g локально замкнутое вложение $g : f^{-1}(W) \hookrightarrow X$. Постройте изоморфизм функторов $f_*h^! \simeq g_!f^*$.

ГА6◊6. Пусть в точной тройке $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ пучков на X пучок F мягок, а отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. Покажите, что а) пучок $f_!F$ мягок б) последовательность пучков $0 \rightarrow f_!F \rightarrow f_!G \rightarrow f_!H \rightarrow 0$ точна в) последовательность $0 \rightarrow H_c^0(X, F) \rightarrow H_c^0(X, G) \rightarrow H_c^0(X, H) \rightarrow 0$ точна.

ГА6◊7. Определим высший прямой образ с компактным носителем $R^q f_!F$ пучка F на X при непрерывном отображении $f : X \rightarrow Y$ как q -тый пучок когомологий комплекса $0 \rightarrow f_!C_F^0 \rightarrow f_!C_F^1 \rightarrow \dots \rightarrow f_!C_F^2 \rightarrow \dots$ пучков на Y , полученного применением функтора $f_!$ к вялой резольвенте Годемана C_F^\bullet пучка F на X (в частности, $H_c^q(X, F) \stackrel{\text{def}}{=} R^q c_!F$, где $c : X \rightarrow \text{pt}$ постоянное отображение в одну точку). Покажите, что а) точная тройка пучков на X порождает длинную точную последовательность высших прямых образов на Y б) в определении $R^q f_!F$ вместо вялой резольвенты Годемана можно взять любой комплекс пучков G^\bullet на X , имеющий единственный ненулевой пучок когомологий $H^0(G^\bullet) \simeq F$ и такой что $R^q f_!G^p = 0$ при $q > 0$ для всех p в) имеется спектральная последовательность Лере с $E_2^{p,q} = H_c^p(Y, R^q f_!F)$, сходящаяся к $H_c^{p+q}(X, F)$.

ГА6◊8. Обозначим через $\dim_c X$ наименьшее такое n , что $H_c^n(X, F) = 0$ для любого пучка F на X . Покажите, что а) если в точной последовательности пучков $0 \rightarrow F \rightarrow S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow \dots \rightarrow S^{n-1} \rightarrow S^n \rightarrow 0$ все пучки S^k с $0 \leq k \leq n-1$ мягкие, то и пучок S^n тоже мягкий б) $\dim_c \mathbb{R}^n = n$ в) $\dim_c W \leq \dim_c X$ для любого локально замкнутого $W \subset X$ г) если у каждой точки $x \in X$ есть открытая окрестность U с $\dim_c U \leq n$, то и $\dim_c X \leq n$ д) $R^q f_!F = 0$ при $q > \dim_c X$ для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ и любого пучка F на X .

¹эта группа называется *группой глобальных сечений с компактными носителями*

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
в			
7а			
б			
в			
8а			
б			
в			
г			
д			