

§2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

2.1. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$ между категориями \mathcal{C} и \mathcal{D} связаны функториальным по $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), \quad (2-1)$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G , а G — *правым сопряжённым* к F . С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F. \quad (2-2)$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \rightarrow Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$, является образом элемента $\text{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $X = G(Y)$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \text{Id}_{G(Y)}.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \rightarrow GF(X)$ получается из $\text{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $Y = F(X)$:

$$\text{Id}_{F(X)} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)).$$

ПРИМЕР 2.1 (продолжение ПРИМ. 1.15 про свободные модули)
Изоморфизм из форм. (1-14) на стр. 17 означает, что функтор

$$F : \text{Set} \rightarrow R\text{-Mod}, \quad E \mapsto R \otimes E,$$

сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый R -модуль с базисом E , сопряжён слева к забывающему функтору $G : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R \otimes E, M) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(E, G(M))$ функториально по модулю M и множеству E . Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(R \otimes E)$$

вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это R -линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M , на модуль M . Он переводит каждый базисный вектор t в элемент $t \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M . Так, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с конечным носителем, а преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции вещественное число, равное сумме всех её (ненулевых) значений.

Предложение 2.1

Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}, \quad Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), \quad (2-3)$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ функтор (2-3) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \simeq h_G^X$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h_G^{X_2} \rightarrow h_G^{X_1}$ заключающееся в правом умножении на φ : стрелка $\psi : X_2 \rightarrow G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \rightarrow G(Y)$. Из леммы Ионеды вытекает¹, что композиция естественных преобразований $(f^{X_1})^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \rightarrow h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \rightarrow F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F . Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. \square

Упражнение 2.1. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ был представим предпучок $h_Y^G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, переводящий $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и $G(X)$ в этом случае его и представляет.

Предложение 2.2

Функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G .

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varrho} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ & \xleftarrow{\lambda} & \end{array} \quad (2-4)$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ в \mathcal{C} и любого Y из \mathcal{D} коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \\ \uparrow F(\varphi)^* & & \uparrow \varphi^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \end{array}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \rightarrow GF(X)$, который задаёт

¹См. сл. 1.1 на стр. 14.

действие над объектом X естественного преобразования $s : \text{Id}_C \rightarrow GF$ из форм. (2-2) на стр. 18, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_C(X, GF(X)) \\ \uparrow F(s_X)^* & & \uparrow s_X^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) & \xleftarrow{\sim \lambda} & \text{Hom}_C(GF(X), GF(X)) \end{array}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\text{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\text{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \rightarrow F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (2-2) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\text{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^*(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^* \lambda(\text{Id}_{GF(X)}) = F(s_X)^*(t_{F(X)}) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F . Проверка того, что $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \text{Id}_C \rightarrow GF$ и $t : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (2-4) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \rightarrow Y$ и $\psi : X \rightarrow G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y.$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \rightarrow Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & F(X) & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \text{Id}_{F(X)} \nearrow & & & \nwarrow t_Y \\ & & F(X) & \xrightarrow{t_{F(X)}} & FGF(X) \\ & & \nwarrow F(s_X) & & \nearrow FG(\varphi) \\ F(X) & \xrightarrow{F(s_X)} & FGF(X) & \xrightarrow{FG(\varphi)} & FG(Y) \end{array}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t , а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и Id_F . Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. \square

2.2. Тензорные произведения и Hom . Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тензорным произведением $M \otimes_R N$ правого R -модуля M на левый R -модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп¹ $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx) \otimes n - m \otimes (xn), \quad \text{где} \quad m \in M, x \in R, n \in N.$$

¹Или, что то же самое, \mathbb{Z} -модулей.

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx) \otimes_R n = m \otimes_R (xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R -модуль N задаёт функтор из категории правых R -модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \rightarrow \mathcal{A}b, \quad X \mapsto X \otimes_R N,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ в стрелку $\varphi \otimes 1 : m \otimes_R n \mapsto \varphi(m) \otimes_R n$. Если левый R -модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S с единицей и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются R - S бимодулями), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M \otimes N$ справа по правилу $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$. С другой стороны, имеется функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \rightarrow \mathcal{A}b, Y \mapsto \text{Hom}_S(N, Y)$, который принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие $x \in R$ на $\text{Hom}_S(N, Y)$ переводит S -линейную справа стрелку $\varphi : N \rightarrow Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ (так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$).

Предложение 2.3

Тензорное умножение на R - S -бимодуль N сопряжено слева функтору h^N , т. е. имеется естественный по $X \in \text{Ob } \mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \text{Ob } \mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(X \otimes_R N, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(X, \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)). \quad (2-5)$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-5) в правую сопоставляет S -линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \otimes_R N \rightarrow Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \rightarrow Y, n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S -линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes ns) = \varphi(x \otimes n)s = \varphi_x(n)s,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)$, R -линейно справа:

$$\varphi_{xr}n = \varphi(xr \otimes n) = \varphi(x \otimes rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n.$$

Обратное отображение из правой части (2-5) в левую переводит семейство S -линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \rightarrow Y$, которые R -линейно справа зависят от $x \in X$, в S -линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \otimes n \mapsto \varphi_x(n)$. \square

Упражнение 2.2. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y) \otimes_R N \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, X \otimes_R N).$$

Пример 2.2 (индуцирование и коиндуцирование)

Если кольцо A содержится в кольце B и у них общая единица, каждый правый B -модуль X одновременно является и правым A -модулем, что задаёт функтор ограничения

$$\text{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \rightarrow \mathcal{M}od\text{-}A. \quad (2-6)$$

Рассматривая B как B - A бимодуль и беря в [предл. 2.3](#) $S = A$, а $N = R = B$, получим в качестве правого A -модуля $X \otimes_B B \simeq \text{res } X$ ограничение A -модуля X и функториальный по B -модулю X и A -модулю Y изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(\text{res } X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(X, \text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(B, Y)).$$

Правый B -модуль $\text{coind } Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A -модуля Y . Функтор коиндуцирования $\text{coind} : \mathcal{M}od-A \rightarrow \mathcal{M}od-B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \text{Hom}_A(B, Y) \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow \text{Hom}_A(B, X).$$

Рассматривая B как A - B бимодуль и полагая в [предл. 2.3](#) $S = N = B$, а $R = A$, получим в качестве правого A -модуля $\text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(B, Y) \simeq \text{res } Y$ ограничение B -модуля Y , и функториальный по A -модулю X и B -модулю Y изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}od-B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{M}od-A}(X, \text{res } Y).$$

Правый B -модуль $\text{ind } X \stackrel{\text{def}}{=} X \otimes_A B$ называется *индуцированным* с A -модуля X . Функтор индуцирования $\text{ind} : \mathcal{M}od-A \rightarrow \mathcal{M}od-B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Явно опишите естественные преобразования

$$\lambda_Y : Y \otimes_A B \rightarrow Y \quad \text{и} \quad \varrho_X : X \rightarrow X \otimes_A B.$$

В ситуации, когда $A = \mathbb{k}[H]$ и $B = \mathbb{k}[G]$ являются групповыми алгебрами (с коэффициентами в поле \mathbb{k}) конечной группы G и её подгруппы H , мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений¹ (над полем \mathbb{k}) группы G с представлений её подгруппы H .

ПРИМЕР 2.3 (СИНГУЛЯРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ)

Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \text{Ob } \Delta$ множество $S_n(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n -мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y , а неубывающему отображению $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ . Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \rightarrow pSh(\Delta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $pSh(\Delta) \rightarrow \mathcal{T}op, X \mapsto |X|$, из [прим. 1.7](#) на стр. 8, т.е. имеется естественный по симплициальному множеству $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \text{Hom}_{pSh}(X, S(Y)), \quad (2-7)$$

¹В этом случае функторы индуцирования и коиндуцирования изоморфны.

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-5) на стр. 21, установленного выше для модулей над кольцами. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию Δ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n$ правильных симплексов, на котором имеется левое действие стрелок φ категории Δ аффинными отображениями φ_* , а также коммутирующее с ним правое действие стрелок категории $\mathcal{T}op$, непрерывно отображающих D в произвольные топологические пространства. С другой стороны, как множество сингулярных симплексов $S(Y)(\Delta) = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ любого топологического пространства Y , так и множество $X(\Delta) = \bigsqcup_{n \geq 0} X_n$ являются правыми модулями над симплициальной категорией Δ в том смысле, что на обоих множествах имеется правое¹ действие стрелок категории Δ . Геометрическая реализация $|X|$ симплициального множества X , т. е. фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом тензорного произведения $X \otimes_{\Delta} D$. Таким образом, изоморфизм (2-7) имеет вид

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X \otimes_{\Delta} D, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod-}\Delta}(X, \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)), \quad (2-8)$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-5) со стр. 21.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-8) и опишите естественные преобразования²

$$t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y \quad \text{и} \quad s_X : X \rightarrow S(|X|).$$

2.3. Пределы диаграмм. Любую малую категорию \mathcal{N} можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории \mathcal{N} . Функторы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ реализуют эту диаграмму в категории \mathcal{C} в том смысле, что указывают объекты $X_\nu = X(\nu)$, занумерованные множеством $\text{Ob } \mathcal{N}$, а также стрелки $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$, занумерованные множеством $\text{Mor } \mathcal{N}$. Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида \mathcal{N} в категории \mathcal{C} . Диаграммы образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ с естественными преобразованиями функторов в качестве морфизмов. Каждый объект $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* \bar{Y} , в которой все объекты $\bar{Y}_\nu = Y$, а все стрелки $\bar{Y}(\nu \rightarrow \mu) = \text{Id}_Y$. Со всякой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(\bar{Y}, X), \quad (2-9)$$

то представляющий объект L называют *пределом*³ диаграммы X и пишут $L = \lim X$. Двойственным образом, объект $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y})$, называется

¹Т. е. оборачивающее композицию.

²Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, |X|)$ соответственно.

³Или *проективным пределом*.

копределом¹ диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ и обозначается $C = \operatorname{colim} X$. С копределом C связана функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \bar{Y}). \quad (2-10)$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая $Y = L$ в формуле (2-9), мы получаем естественное преобразование $\pi : \bar{L} \rightarrow X$, соответствующее тождественному эндоморфизму Id_L и представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : L \rightarrow X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы X набора стрелок $\psi_\nu : Y \rightarrow X_\nu$, выпущенных из произвольного объекта $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, существует единственный морфизм $\alpha : Y \rightarrow \operatorname{lim} X$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν .

Двойственным образом, в копредел $C = \operatorname{colim} X$ диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\iota_\nu : X_\nu \rightarrow C$, что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\psi_\nu : X_\nu \rightarrow Y$ в произвольный объект $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \rightarrow Y$, такой что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν .

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

ПРИМЕР 2.4 (начальный, конечный и нулевой объекты)

Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Og — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \rightarrow \operatorname{Fin}$ и единственная стрелка $\operatorname{Og} \rightarrow X$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется как начальный, так и конечный объект, причём они вдобавок ещё и равны друг другу, объект $0 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Fin} = \operatorname{Og}$ называется *нулевым*. Морфизм $X \rightarrow Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается² в композицию $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Какие категории из упр. 2.7 обладают нулевым объектом?

ПРИМЕР 2.5 (прямые (ко) произведения)

Малая категория \mathcal{N} называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через $\prod_\nu X_\nu$ и $\coprod_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два,

¹Или *инъективным* пределом.

²Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.

мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из [прим. 1.13](#) и [прим. 1.14](#) на [стр. 16](#). Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

ПРИМЕР 2.6 ((ко) УРАВНИТЕЛИ)

(Ко)предел диаграммы вида $X \begin{matrix} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{matrix} Y$ называется (ко)уравнителем¹ стрелок φ и ψ .

В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \rightarrow Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности² $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \rightarrow B$ в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

ПРИМЕР 2.7 (ПОСЛОЙНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*³ *произведением* и обозначается $X \times_B Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} X \times_B Y & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array} \quad (2-11)$$

¹По-английски *(co)equalizer*.

²Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2, y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество $S \subset Y \times Y$ содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности R_S , которое называется *порождённым* подмножеством S . Всякое отображение $\xi : Y \rightarrow Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y , причём $\xi' : Y \rightarrow Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \rightarrow Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ , *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

³Или *расслоенным*.

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi'} & Y \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\xi} & B \end{array}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \rightarrow X \times_B Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-11) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ .

В категории множеств отображение $X \times_B Y \rightarrow B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

УПРАЖНЕНИЕ 2.11. Убедитесь, что $U \times_X V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X .

ПРИМЕР 2.8 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \otimes_B Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \otimes_B Y \end{array} \quad (2-12)$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \xi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ X & \xrightarrow{\varphi'} & Z \end{array}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \otimes_B Y \rightarrow Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.12. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп¹, коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

¹В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгами*.

2.3.1. (Ко) замкнутость. Категория \mathcal{C} называется (ко) замкнутой, если для любой малой категории \mathcal{N} каждая диаграмма $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в \mathcal{C} .

Предложение 2.4

Для замкнутости категории \mathcal{C} достаточно существования в \mathcal{C} конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в \mathcal{C} начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор морфизмов $\varphi_\nu : L \rightarrow X_\nu$, решающий уравнения $\varphi_\mu = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$, где $\nu \rightarrow \mu$ пробегает $\text{Mor } \mathcal{N}$. Для каждой стрелки $\nu \rightarrow \mu$ обозначим $T_{\nu \rightarrow \mu} = X_\mu$ тот объект диаграммы X , в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения $A = \prod_\mu X_\mu$ и $B = \prod_{\nu \rightarrow \mu} T_{\nu \rightarrow \mu}$. В первое из них каждый объект диаграммы X входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки $\mu \rightarrow \nu$ имеются два отображения $A \rightarrow T_{\nu \rightarrow \mu}$: проекция $\pi_\mu : A \rightarrow X_\mu$ произведения A на μ -тый сомножитель и композиция $\kappa_{\nu \rightarrow \mu} = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \pi_\nu$, проекции $\pi_\nu : A \rightarrow X_\nu$ произведения A на ν -тый сомножитель со стрелкой $X(\nu \rightarrow \mu) : X_\nu \rightarrow X_\mu$ диаграммы X . По универсальному свойству произведения B эти пары отображений задают два морфизма $\pi, \kappa : A \rightarrow B$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \rightarrow A$, который представляет собою набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \kappa_{\nu \rightarrow \mu} \circ \varphi = X(\nu \rightarrow \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!). \square

Пример 2.9

В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν) , $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \rightarrow \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \rightarrow \mu$ из $\text{Mor } \mathcal{N}$.

Упражнение 2.13. Проверьте, что $\text{colim } X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\prod_{\nu \rightarrow \mu} S_{\nu \rightarrow \mu} \xrightarrow[\kappa]{\iota} \prod_\nu X_\nu,$$

в которой объекты $S_{\nu \rightarrow \mu} = X_\nu$ суть начала стрелок $X(\nu \rightarrow \mu)$ диаграммы X , а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \kappa_{\nu \rightarrow \mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \rightarrow \mu) : S_{\nu \rightarrow \mu} \rightarrow \prod_\nu X_\nu.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств $\text{colim } X$ является фактором дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\nu X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, для которого $x = X(\nu \rightarrow \mu)x$ для всех $x \in X_\nu$ и всех стрелок $\nu \rightarrow \mu$ из $\text{Mor } \mathcal{N}$.

Замечание 2.1. Для того, чтобы в категории \mathcal{C} существовали (ко) пределы всех конечных диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно требовать существования в \mathcal{C} конечных (ко) произведений.

Следствие 2.1

Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 2.9. □

Пример 2.10 (уточнённое определение пучка)

Объединение $U = \bigcup_i U_i$ произвольного семейства $\{U_i\}_{i \in I}$ открытых множеств топологического пространства X является коуравнителем отображений

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} \prod_i U_i,$$

являющихся копроизведениями вложений $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ и $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Всякий предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$ объектов любой категории \mathcal{C} переводит диаграмму коуравнителя

$$\prod_{ij} U_i \cap U_j \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} \prod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U, \quad (2-13)$$

в следующую диаграмму в категории \mathcal{C} :

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \xrightarrow[\psi_2^*]{\psi_1^*} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j). \quad (2-14)$$

Стрелка φ^* этой диаграммы является произведением ограничений $F(U) \rightarrow F(U_i)$, а стрелки ψ_1^* и ψ_2^* — ограничений $F(U_i) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$ и $F(U_j) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$ соответственно. По определению, предпучок F является пучком, если стрелка φ является уравнителем стрелок ψ_1^* и ψ_2^* . В частности, когда множество индексов $I = \emptyset$, мы получаем в левом члене диаграммы (2-14) объект $F(\emptyset) \in \text{Ob } \mathcal{C}$, а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту¹ $\text{Fin}_{\mathcal{C}}$ категории \mathcal{C} . Стрелки ψ_1^* и ψ_2^* являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен $\text{Id}_{\text{Fin}_{\mathcal{C}}}$. Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории \mathcal{C} на топологическом пространстве X должно выполняться равенство $F(\emptyset) = \text{Fin}_{\mathcal{C}}$. Например, для любого пучка множеств $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$ множество $F(\emptyset)$ состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \text{Ab}$ группа $F(\emptyset) = 0$.

¹Тем самым, для того чтобы предпучок F был пучком, необходимо, чтобы в категории \mathcal{C} был конечный объект (см. прим. 2.4 на стр. 24).

2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы. Малая категория \mathcal{F} называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка ζ , что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Например, любой чум, в котором у каждого двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией¹. Диаграммы вида $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$ с фильтрующейся категорией \mathcal{F} принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) системами стрелок категории \mathcal{C} , а их (ко)пределы обозначать через \varinjlim, \varinjlim для прямых систем и \varprojlim, \varprojlim для обратных. Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$ по отношению эквивалентности, отождествляющему $x_v \in X_v$ и $x_\mu \in X_\mu$, если существует такая пара стрелок $v \rightarrow \eta \leftarrow \mu$, что $X(v \rightarrow \eta)x_v = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$ в множестве X_η .

УПРАЖНЕНИЕ 2.14. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и убедитесь, что множество классов эквивалентности изоморфно $\varinjlim X$.

ПРИМЕР 2.11 (РАЗБИЕНИЯ ОТРЕЗКА)

Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории \mathcal{V}_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$. В категории \mathcal{V}_{big} копредела не существует.

ПРИМЕР 2.12 (ОТКРЫТЫЕ ОКРЕСТНОСТИ И СЛОЙ ПРЕДУПЧКА)

Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X , т. к. для любых окрестностей $U, W \supset Z$ окрестность $U \cap W = U \times_X W \supset Z$ вкладывается и в окрестность U , и в окрестность W . Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z . В категории \mathcal{U} предела может и не быть. Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z . В силу козамкнутости категории $\mathcal{S}et$ этот копредел всегда существует. Согласно [упр. 2.14](#), каждый элемент слоя F_Z представляет собою класс $s|_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над каким-либо открытым множеством $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым открытым V , таким что $Z \subset V \subset U \cap W$. Определённые таким образом классы $s|_Z$ называются *ростками сечений* предпучка F над Z .

В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x* . Мы будем обозначать класс сечения s в слое F_x через $s|_x$. В ситуации, когда F — пучок функций на X со значениями в каком-либо поле \mathbb{k} , класс $f|_x \in F_x$ локальной функции $f \in F(U)$ в слое F над точкой $x \in U$ не следует путать со значением $f(x) \in \mathbb{k}$ этой функции в точке x , поскольку, во первых, они лежат в разных множествах, во вторых,

¹Ср. с [прим. 1.2](#) на стр. 3.

равенство $f|_x = g|_x$ означает равенство $f \equiv g$ в некоторой открытой окрестности точки x , что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений $f(x) = g(x)$.

ПРИМЕР 2.13 (ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЬЦА)

Пусть подмножество S ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца R с единицей таково, что $1 \in S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия Ore¹:

$$\forall \varrho \in R, \forall s \in S \quad \exists \lambda \in R, \exists t \in S : \lambda s = t\varrho \quad (\text{O}_1)$$

$$\forall \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists s \in S : \varphi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists t \in S : t\varphi = t\psi. \quad (\text{O}_2)$$

Превратим множество S в категорию, полагая $\text{Hom}_S(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.15. Выведите из условий Ore, что категория S фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых R -модулей фильтрующуюся диаграмму $S \rightarrow \text{Mod-}R$, образованную свободными модулями $s^{-1}R$ ранга один, где символом s^{-1} обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту $s \in S$, и R -линейными отображениями $\lambda_* : s_1^{-1}R \rightarrow s_2^{-1}R$, которые отвечают стрелкам $\lambda \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$ и действуют на базисный вектор по правилу $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$. Копредел этой диаграммы в категории $\text{Mod-}R$ состоит из классов $s^{-1}\varrho$, где $s \in S$, $\varrho \in R$, по модулю равенств $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$, означающих существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2$ в R . Классы $s^{-1}\varrho$ называются *левыми дробями* со знаменателями в S . Они образуют правый R -модуль, обозначаемый $S^{-1}R$ и именуемый *левой локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы Ore S .

УПРАЖНЕНИЕ 2.16. Чему равна сумма $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$ в модуле $S^{-1}R$?

Определим *произведение* левых дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ следующим образом. Пользуясь условием (O₁) подберём такие $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что² $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$, и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \stackrel{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1 \varrho_2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.17. Проверьте, что это определение корректно³ и задаёт на модуле $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца R кольцо дробей $S^{-1}R$ изоморфно известному из курса алгебры⁴ кольцу частных a/s , где $a \in R$, $s \in S$, и $a_1/s_1 = a_2/s_2$, если и только если $\exists s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ в R .

2.4. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование f диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$, по одной для каждого $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ имеют в категории \mathcal{C} пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \rightarrow Y$

¹В коммутативном кольце R оба условия Ore выполнены автоматически.

²Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1} \lambda_1$.

³Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$.

⁴См. <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf>.

существует единственный морфизм $\lim f : L_X \rightarrow L_Y$, такой что при всех $\mu \in \text{Ob } \mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_X & \xrightarrow{\pi_{\tau(\mu)}} & X_{\tau(\mu)} \\ \lim f \downarrow & & \downarrow f_\mu \\ L_Y & \xrightarrow{\pi_\mu} & Y_\mu, \end{array} \quad (2-15)$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \rightarrow Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y , перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \rightarrow \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (2-15) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \text{colim } X_\nu$ и $C_Y = \text{colim } Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \rightarrow Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\text{colim } f : C_X \rightarrow C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_\nu & \xrightarrow{l_\nu} & C_X \\ f_\nu \downarrow & & \downarrow \text{colim } f \\ Y_{\tau(\nu)} & \xrightarrow{l_{\tau(\nu)}} & C_Y, \end{array}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \text{Id}$ из предл. 2.1 на стр. 19 и равенств (2-9) и (2-10) на стр. 24 получаем

Предложение 2.5

Для заданных малой категории \mathcal{N} и (ко)замкнутой категории \mathcal{C} копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ в постоянную диаграмму \bar{C} . \square

Замечание 2.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Следствие 2.2

Категория $pSh(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории \mathcal{U} замкнута и козамкнута. Для любой диаграммы предпучков $F : \mathcal{N} \rightarrow pSh(\mathcal{U})$ множества сечений предпучков $L = \lim F$ и $C = \text{colim } F$ над любым объектом $U \in \mathcal{U}$ суть $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \text{colim } F(U)$, где диаграмма $F(U) : \mathcal{N} \rightarrow Set$ образована множествами сечений предпучков диаграммы F над объектом U с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы F над этим объектом.

Доказательство. В силу функториальности (ко)пределов, множества $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \text{colim } F(U)$ составляют предпучки множеств на \mathcal{U} , и для любого предпучка $F_\nu : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow Set$ диаграммы F имеются перестановочные со всеми морфизмами из диаграммы канонические морфизмы предпучков $L \rightarrow F_\nu$ и $F_\nu \rightarrow C$, действие которых над каждым объектом $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$ задаётся стрелками $\lim F(U) \rightarrow F_\nu(U)$ и $F_\nu(U) \rightarrow \text{colim } F(U)$ в категории Set . Универсальность этих морфизмов также проверяется отдельно над каждым объектом $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$. \square

2.4.1. Перестановочность функторов с (ко) пределами. Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ перестановочен с (ко) пределами, если для любого $L \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в \mathcal{C} , вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в \mathcal{D} .

Предложение 2.6

Если функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\text{colim } X), D) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } X, G(D)) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})}(X, \overline{G(D)}) \simeq \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{D})}(F \circ X, \overline{D}). \end{aligned}$$

Тем самым, $F(\text{colim } X) \simeq \text{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. \square

Следствие 2.3

Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S -модулей. В частности, тензорное умножение на N переводит коядра в коядра, т. е. для любого $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mod-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\text{coker} \left(\varphi \otimes_S \text{Id}_N : K \otimes_S N \rightarrow L \otimes_S N \right) \simeq \text{coker}(\varphi) \otimes_S N.$$

Доказательство. По [предл. 2.3](#) на стр. 21, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $\text{Mod-}S \rightarrow \text{Ab}$, $X \mapsto X \otimes_S N$, сопряжён слева функтору $Y \mapsto \text{Hom}_{\text{Ab}}(N, Y)$. \square

Следствие 2.4

Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма $F : \mathcal{M} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ естественных преобразований $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)$ диаграмм $\{F_\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}\}$, что для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $\nu \in \mathcal{N}$ μ -тая диаграмма $F_\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ и диаграмма $F(\nu)$, задающая действие стрелок $F(\mu_1 \rightarrow \mu_2)_\nu$ между элементами $F_\mu(\nu)$ с фиксированным номером ν , обе имеют (ко)предел в \mathcal{C} , то

$$\lim_{\mu} \lim_{\nu} F_\mu \simeq \lim_{\nu} \lim_{\mu} F(\nu) \quad \text{и} \quad \text{colim}_{\mu} \text{colim}_{\nu} F_\mu \simeq \text{colim}_{\nu} \text{colim}_{\mu} F(\nu).$$

Следствие 2.5

Если стрелки $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$ задают естественное преобразование между диаграммами абелевых групп $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \text{Ab}$, то копредел коядер этих стрелок равен коядру индуцированной стрелки между копределами, а предел ядер — ядру стрелки между пределами:

$$\begin{aligned} \text{colim coker } f_\nu &\simeq \text{coker} \left(\text{colim } X_\nu \xrightarrow{\text{colim } f_\nu} \text{colim } Y_\nu \right) \\ \lim \ker f_\nu &\simeq \ker \left(\lim X_\nu \xrightarrow{\lim f_\nu} \lim Y_\nu \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. \square

Предложение 2.7

Копределы прямых систем абелевых групп перестановочны также и с ядрами, т. е. если в сл. 2.5 категория \mathcal{N} индексов диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$ фильтрующаяся, то

$$\operatorname{colim} \ker (f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu) \simeq \ker \left(\operatorname{colim} X_\nu \xrightarrow{\operatorname{colim} f_\nu} \operatorname{colim} Y_\nu \right). \quad (2-16)$$

Доказательство. Согласно упр. 2.14 на стр. 29 копредел фильтрующейся диаграммы Z является фактором дизъюнктного объединения $\coprod Z_\nu$ по эквивалентности, отождествляющей элементы $z_\nu \in Z_\nu$ и $z_\mu \in Z_\mu$, когда есть пара стрелок $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$, переводящих эти элементы в один и тот же элемент из Z_η . Пусть $\varphi = \operatorname{colim} f_\nu$. Эта предельная стрелка переводит класс $[x_\nu]$ элемента $x_\nu \in X_\nu$ в класс элемента $f_\nu(x_\nu) \in Y_\nu$.

Упражнение 2.18. Убедитесь, что класс результата не зависит от выбора представителя в классе $[x_\nu]$.

Сопоставляя классу $[x_\nu] \in \operatorname{colim} \ker (f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu)$ из левой части (2-16) класс этого же элемента $x_\nu \in \ker f_\nu \subset X_\nu$, но уже в копределе $\operatorname{colim} X_\nu$, мы получим класс, лежащий в $\ker \varphi$. Это задаёт гомоморфизм из левой части (2-16) в правую. Чтобы построить обратный гомоморфизм, рассмотрим класс $[x_\nu] \in \ker \varphi$. Раз $[f_\nu(x_\nu)] = [0]$ в $\operatorname{colim} Y_\nu$, найдутся такие стрелки $\nu \rightarrow \eta \leftarrow \mu$, что $f_\nu(X(\nu \rightarrow \eta)x_\nu) = Y(\nu \rightarrow \eta)f_\nu(x_\nu) = Y(\mu \rightarrow \eta)0 = 0$ в Y_η . Тем самым, элемент $x_\eta = X(\nu \rightarrow \eta)x_\nu \in \ker f_\nu$. Сопоставление классу $[x_\nu] \in \ker \varphi$ класса $[x_\eta] \in \operatorname{colim} \ker (f_\nu)$ задаёт гомоморфизм из правой части (2-16) в левую. Остаётся убедиться, что он определён корректно и обратен предыдущему. \square

Упражнение 2.19. Сделайте это, а также докажите, что в категории $\mathcal{S}et$ стрелка

$$\varphi : \operatorname{colim} X_\nu \rightarrow \operatorname{colim} Y_\nu,$$

являющаяся копределом такого естественного преобразования $f : X \rightarrow Y$ фильтрованных диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{S}et$, в котором все стрелки $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$ инъективны (соотв. сюръективны, биективны), тоже инъективна (соотв. сюръективна, биективна).

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.5. Непрерывному отображению $f : |X| \rightarrow Y$ из $\text{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \text{Ob } \Delta$ преобразование $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ из $\text{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию

$$f \circ \iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X| \rightarrow Y,$$

где $\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$ это ограничение отображения факторизации¹

$$\iota : \bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n \rightarrow |X|$$

на правильный симплекс $\{x\} \times \Delta^n \subset X_n \times \Delta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному по $[n] \in \text{Ob } \Delta$ набору отображений $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ отображение $|X| \rightarrow Y$, переводящее класс точки $(x, s) \in X_n \times \Delta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) : \Delta^n \rightarrow Y$ в точке $s \in \Delta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x, s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \rightarrow Y$ переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \rightarrow Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n,$$

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплицеального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X : X \rightarrow S(|X|)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \text{Ob } \Delta$ переводит точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \rightarrow |X|$$

топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \text{Ob } \Delta$ и предпучку $F \in \text{Ob } \mathcal{F}un(\Delta^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$).

Упр. 2.7. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа². В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 2.8. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 2.12. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \rightarrow B$ наделяют A и B структурами K -алгебр, и копроизведение $A \otimes_K B$ это тензорное произведение K -алгебр, т. е.

¹Непрерывного в силу определения фактор топологии.

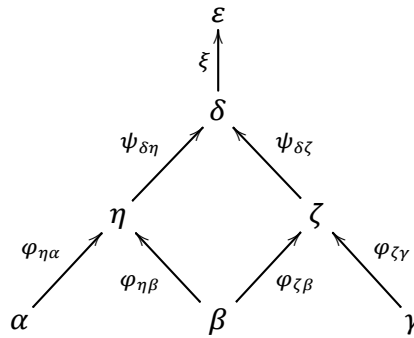
²Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

фактор свободного K -модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \kappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \kappa_i \in K, a_i \in A, \beta_j \in B$ (ср. с н° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) = (a_1 a_2) \otimes_K (b_1 b_2)$.

Упр. 2.14. По упр. 2.13 копредел $\text{colim}_{\rightarrow} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\coprod_{v \in \text{Ob } \mathcal{F}} X_v$ по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства $x = X(v \rightarrow \mu)x$ для всех стрелок $v \rightarrow \mu$ из $\text{Mor } \mathcal{F}$ и всех $x \in X_v$. При этом элементы $x_v \in X_v$ и $x_\mu \in X_\mu$ заведомо отождествляются, если $X(v \rightarrow \eta)x_v = X(\mu \rightarrow \eta)x_\mu$ для некоторой пары стрелок $v \rightarrow \eta \leftarrow \mu$. Достаточно убедиться, что последнее свойство является отношением эквивалентности. Его рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если x_α эквивалентен x_β , а x_β эквивалентен x_γ , то в категории \mathcal{F} имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стрелок



что $X(\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\varphi_{\eta\beta})x_\beta$ и $X(\varphi_{z\beta})x_\beta = X(\varphi_{z\gamma})x_\gamma$ в категории Set , а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{z\beta}$ в $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через κ , имеем

$$X(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha})x_\alpha = X(\kappa)x_\beta = X(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{z\gamma})x_\gamma.$$

Упр. 2.15. Применяя первое условие Ore¹ к произвольным элементам $s = s_1$ и $q = s_2$ из S получаем ведущие из s_1 и s_2 стрелки λ и t с общим концом $\lambda s_1 = t s_2 \in S$. Применяя второе условие Ore² к паре стрелок $\varphi, \psi \in \text{Hom}_S(s, s')$, где $s' = \varphi s = \psi s$, получаем такую стрелку $u \in \text{Hom}_S(s', ts')$, что $t\varphi = u\psi$.

Упр. 2.16. Так как по предыдущему упр. 2.15 категория S фильтрующаяся, у дробей $s_1^{-1}q_1$ и $s_2^{-1}q_2$ есть общий знаменатель, равный $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ для подходящих $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тогда $s_1^{-1}q_1 + s_2^{-1}q_2 = t^{-1}(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2)$.

¹См. формулу (O₁) на стр. 30.

²См. формулу (O₂) на стр. 30.