

§3. Предпучки и пучки

3.1. Предпучки на малой категории. С каждым предпучком множеств F на малой категории \mathcal{U} функториально связана малая категория \mathcal{N}_F с множеством объектов

$$\text{Ob } \mathcal{N}_F \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{U \in \text{Ob } \mathcal{U}} F(U).$$

Будем обозначать объект $s \in F(U)$ категории \mathcal{N}_F символом sU , и для каждой стрелки $\varphi : U \rightarrow W$ в категории \mathcal{U} условимся записывать действие контравариантного по φ морфизма $F(\varphi) : F(W) \rightarrow F(U)$ на сечение $t \in F(U)$ в виде $t \mapsto t\varphi$, т. е. как правое умножения на φ . Множества морфизмов категории \mathcal{N}_F определяются как

$$\text{Hom}_{\mathcal{N}_F}(sU, tW) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \rightarrow W \mid t\varphi = s\}.$$

Таким образом, стрелки категории \mathcal{N}_F , ведущие в объект tW , находятся в биекции со стрелками категории \mathcal{U} , ведущими в объект W , и имеют вид $(t\varphi)U \rightarrow tW$, где $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{U}}(U, W)$. В частности, для категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых множеств топологического пространства X множество $\text{Hom}_{\mathcal{N}_F}(sU, tW)$ непусто, если и только если $U \subset W$ и $s = t|_U$, и в этом случае $\text{Hom}_{\mathcal{N}_F}(t|_U U, tW)$ состоит из единственного элемента — вложения $U \hookrightarrow W$.

В самой категории \mathcal{U} и в категории $pSh(\mathcal{U})$ предпучков множеств на \mathcal{U} имеются канонические диаграммы формы \mathcal{N}_F , переводящиеся друг в друга вложением Ионеды:

$$\begin{array}{ccc} & pSh(\mathcal{U}) & \\ H_F \nearrow & \uparrow h_* & \text{вложение} \\ \mathcal{N}_F & & \text{Ионеды} \\ D_F \searrow & \downarrow & \\ & \mathcal{U} & \end{array} \quad (3-1)$$

где $h_* : \mathcal{U} \rightarrow pSh(\mathcal{U})$, $U \mapsto h_U$.

Диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \rightarrow pSh(\mathcal{U})$ сопоставляет объекту tW категории \mathcal{N}_F представимый предпучок h_W , который мы будем обозначать th_W , чтобы помнить, какому сечению $t \in F(W)$ он соответствует. Элементы $\psi \in th_W(U) = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(U, W)$ мы также будем обозначать $t\psi$. Стрелке $t\varphi U \rightarrow tW$, происходящей из морфизма $\varphi : U \rightarrow W$, на диаграмме H_F отвечает естественное преобразование $\varphi_* : t\varphi h_U \rightarrow th_W$ левого умножения на φ , действие которого над объектом $V \in \text{Ob } \mathcal{U}$ задаётся правилом

$$\varphi_{V*} : (t\varphi) \text{Hom}_{\mathcal{U}}(V, U) \rightarrow (t) \text{Hom}_{\mathcal{U}}(V, W), \quad (t\varphi)\psi \mapsto t(\varphi\psi).$$

Диаграмма $D_F : \mathcal{N}_F \rightarrow \mathcal{U}$ сопоставляет объекту tW категории \mathcal{N}_F подлежащий ему объект U категории \mathcal{U} , который мы будем по-прежнему обозначать sU . Стрелке $t\varphi U \rightarrow tW$ категории \mathcal{N}_F на диаграмме H_F отвечает тот самый морфизм $\varphi : U \rightarrow W$ категории \mathcal{U} , которым эта стрелка задаётся.

ЛЕММА 3.1

Каждый предпучок множеств F на малой категории \mathcal{U} является копределом

$$F = \operatorname{colim} H_F$$

функториально зависящей от F диаграммы H_F представимых предпучков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из каждого объекта $sh_U = h_U$ диаграммы H_F ведёт каноническая стрелка $s : h_U \rightarrow F$ — естественное преобразование, отвечающее по Ионед¹ элементу $s \in F(U)$. Его действие над объектом $V \in \operatorname{Ob} \mathcal{U}$ переводит лежащую в $h_U(V)$ стрелку $\psi : V \rightarrow U$ в элемент $s\psi \in F(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь, что стрелки $s : sh_U \rightarrow F$ перестановочны со всеми стрелками диаграммы H_F .

Пусть в некоторый предпучок $G : \mathcal{U}^{\operatorname{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ тоже ведут перестановочные со стрелками диаграммы H_F естественные преобразования $\gamma_U(s) : sh_U \rightarrow G$. По лемме Ионеды эти преобразования однозначно задаются такими элементами $g_U(s) \in G(U)$, что для любой стрелки $\varphi : U \rightarrow W$ и любого элемента $t \in F(W)$ выполняется равенство² $g_W(t)\varphi = g_U(t\varphi)$. Поэтому правило $g_U : F(U) \rightarrow G(U)$, $s \mapsto g_U(s)$, корректно задаёт морфизм предпучков $g : F \rightarrow G$, перестановочный со всеми ведущими в них из диаграммы H_F стрелками, причём это единственный способ задать такой морфизм предпучков. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Выведите лем. 3.1 из сл. 2.2 на стр. 31.

ТЕОРЕМА 3.1 (О ПРОДОЛЖЕНИИ ПО НЕПРЕРЫВНОСТИ)

Для любого ковариантного функтора $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}$ из малой категории \mathcal{U} в произвольную козамкнутую категорию \mathcal{C} существует единственный с точностью до естественного изоморфизма перестановочный с копределами функтор $G^\sim : pSh(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{C}$, такой что $G^\sim \circ h_* \simeq G$, где $h_* : \mathcal{U} \rightarrow pSh(\mathcal{U})$ — вложение Ионеды. Этот функтор сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{U})$, который переводит объект $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ в предпучок

$$h_*^G : \mathcal{U}^{\operatorname{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et, \quad U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(U), C).$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Проверьте, что правило $C \mapsto h_*^G$ и впрямь задаёт ковариантный функтор $\mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{U})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждый предпучок F на \mathcal{U} является копределом диаграммы $H_F = h_* \circ D_F$ из форм. (3-1) на стр. 34, равенство $G^\sim \circ h_* \simeq G$ и перестановочность функтора G^\sim с копределами не оставляют иной возможности, как положить

$$G^\sim(F) = G^\sim \operatorname{colim} H_F = G^\sim \operatorname{colim} h_* D_F = \operatorname{colim} G^\sim h_* D_F = \operatorname{colim} G D_F, \quad (3-2)$$

где $G D_F : \mathcal{N}_F \rightarrow \mathcal{C}$ это диаграмма в категории \mathcal{C} , полученная применением функтора G к диаграмме D_F из (3-1). Диаграмма $G D_F$ состоит из объектов $sG(U) = G(U) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, по одному для каждой пары (s, U) , $U \in \operatorname{Ob} \mathcal{U}$, $s \in F(U)$, и стрелок

$$G(\varphi) : (t\varphi)G(U) \rightarrow tG(W),$$

¹См. лем. 1.2 на стр. 14.

²Напомним, что правое умножение сечения $g \in G(W)$ предпучка $G : \mathcal{U}^{\operatorname{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ на морфизм $\varphi : U \rightarrow W$ из категории \mathcal{U} по определению означает результат применения к g морфизма ограничения $F(\varphi) : F(W) \rightarrow F(U)$, т. е. $g\varphi \stackrel{\text{def}}{=} G(\varphi)g$.

по одной для каждой пары (t, φ) , $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{U}}(U, W)$, $t \in F(W)$. Естественное преобразование диаграммы GD_F в постоянную диаграмму \bar{C} , ассоциированную с объектом $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$, это такой набор стрелок $\gamma_{sU} : sG(U) \rightarrow C$, что $\gamma_{tW} \circ G(\varphi) = \gamma_{t\varphi U}$ для всех морфизмов $\varphi : U \rightarrow W$ категории \mathcal{U} и всех $t \in F(W)$. Такой набор стрелок задаёт естественное преобразование предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ в предпучок

$$h_C^G : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et, \quad U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(U), C),$$

действие которого над объектом $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$ переводит сечение $s \in F(U)$ в морфизм $\gamma_{sU} : sG(U) \rightarrow C$. Тем самым, имеется функториальная по $F \in \text{Ob } pSh(\mathcal{U})$ и $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } GD_F, C) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}_F, \mathcal{C})}(GD_F, \bar{C}) \simeq \text{Hom}_{pSh(\mathcal{C})}(F, h_C^G).$$

Поэтому согласно [предл. 2.1](#) на стр. 19 сопоставление $F \mapsto \text{colim } GD_F$ однозначно задаёт функтор $G^\sim : pSh(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{C}$, сопряжённый слева к функтору

$$h_*^G : \mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{U}), \quad C \mapsto h_C^G.$$

Как и всякий левый сопряжённый функтор, он перестановочен с копределами¹. \square

ПРИМЕР 3.1 (ТЕНЗОРНОЕ УМНОЖЕНИЕ НА БИМОДУЛЬ)

Всякое кольцо R с единицей можно рассматривать как аддитивную категорию \mathcal{U} с одним объектом U и $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(U, U) = R$. Предпучок абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}b$ на этой категории это правый R -модуль $F = F(U)$, так что $pSh(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{M}od-R$. Объекты категории \mathcal{N}_F суть элементы $s \in F$, и $\text{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s, t) = \{\varphi \in R \mid t\varphi = s\}$ это *трансформатор* из t в s . Представимый предпучок абелевых групп h_U это свободный модуль ранга 1, т. е. само кольцо R , рассматриваемое как правый модуль над собой. Объекты диаграммы $H_F : \mathcal{N}_F \rightarrow \mathcal{M}od-R$ суть свободные модули sR ранга 1 с базисными элементами $s \in F$, а стрелки — R -линейные справа отображения $(t\varphi)R \rightarrow tR$, переводящие базисный вектор $t\varphi \in (t\varphi)R$ в вектор $t \cdot \varphi \in tR$. В этой ситуации [лем. 3.1](#) утверждает, что копредел такой диаграммы канонически изоморфен модулю F .

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Убедитесь в этом непосредственно.

Возьмём в качестве козамкнутой категории \mathcal{C} категорию $\mathcal{M}od-S$ правых модулей над каким-либо кольцом S . Тогда ковариантный функтор $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}od-S$ есть то ни что иное, как R - S -бимодуль $G = G(U)$. Отвечающий такому бимодулю функтор

$$h_*^G : \mathcal{M}od-S \rightarrow pSh(\mathcal{U}) = \mathcal{M}od-R$$

переводит S -модуль C в R -модуль $\text{Hom}_{\mathcal{M}od-S}(G, C)$, правое действие кольца R на котором это левое действие на модуле G . В данном случае [теор. 3.1](#) утверждает, что у этого функтора есть левый сопряжённый функтор $G^\sim : F \mapsto \text{colim } GD_F$. Объектами диаграммы GD_F являются одинаковые копии sG модуля G , занумерованные элементами $s \in F$, а стрелками — морфизмы $\varphi : (t\varphi)G \rightarrow tG$, $(t\varphi) \cdot g \mapsto t \cdot (\varphi g)$, по одному для каждого элемента $\varphi \in R$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Убедитесь, что $\text{colim } GD_F = F \otimes_R G$.

¹См. [предл. 2.6](#) на стр. 32.

Таким образом мы снова получаем канонический изоморфизм из [предл. 2.3](#) на стр. 21:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\text{-}S}(F \otimes_R G, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\text{-}R}(F, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\text{-}S}(G, C)).$$

ПРИМЕР 3.2 (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ)

Для симплициальной категории $\mathcal{U} = \Delta$ и симплициального множества $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \rightarrow pSh(\Delta)$ состоит из объектов $sh_{[n]}$, занумерованных числами $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и симплексами $s \in F_n = F([n])$. Каждый предпучок $sh_{[n]} = h_{[n]} : \Delta^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ является комбинаторным описанием стандартной триангуляции правильного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Действие стрелки $\varphi_* : (t\varphi)h_{[n]} \rightarrow th_{[m]}$ состоит в левом умножении стрелок из $h_{[n]}$ на φ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории симплициальных множеств изоморфен F .

Функтор геометрической реализации $G : \Delta \rightarrow \mathcal{T}op$ переводит комбинаторный симплекс $[n]$ в геометрический симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. По [теор. 3.1](#) этот функтор канонически продолжается на любые симплициальные множества перестановочным с копределами функтором $G^\sim : pSh(\Delta) \rightarrow \mathcal{T}op$, который переводит симплициальное множество F в копредел диаграммы GD_F в категории $\mathcal{T}op$. Эта диаграмма получается из предыдущей диаграммы H_F заменой каждого комбинаторного симплекса $h_{[n]}$ на геометрический симплекс Δ^n , а морфизмов $\varphi_* : h_{[n]} \rightarrow h_{[m]}$, задаваемых левыми умножениями на стрелки $\varphi : [m] \rightarrow [n]$ в категории Δ , — на аффинные отображения $\varphi_* : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ действующие на вершины симплексов стрелкой φ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь, что копредел такой диаграммы гомеоморфен топологическому пространству $|F|$ из [прим. 1.7](#) на стр. 8.

Правый сопряжённый к геометрической реализации функтор $h_*^G : \mathcal{C} \rightarrow h_C^G$ сопоставляет топологическому пространству \mathcal{C} симплициальное множество его сингулярных симплексов $h_C^G = S(\mathcal{C}) : [n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, \mathcal{C})$. В данном случае [теор. 3.1](#) утверждает наличие канонического изоморфизма $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|F|, \mathcal{C}) = \mathrm{Hom}_{pSh(\Delta)}(F, S(\mathcal{C}))$ из [прим. 2.3](#) на стр. 22.

ПРИМЕР 3.3 (ЭТАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПРЕДПУЧКА)

В случае, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ является категорией открытых множеств топологического пространства X , а $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ это предпучок на X , диаграмма H_F состоит из представимых предпучков sh_U , по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого $s \in F(U)$. Пучок sh_U имеет пустые множества сечений над всеми $V \not\subseteq U$ и одноточечное множество сечений над каждым $V \subseteq U$. Единственный элемент последнего множества уместно обозначить $s|_V$. Каждому включению $U \hookrightarrow W$ и сечению $t \in F(W)$ в диаграмме H_F отвечает стрелка $t|_U h_U \rightarrow th_W$, действие которой над открытым $V \subseteq U \subseteq W$ переводит единственный элемент $t|_V \in t|_U h_U(V)$ в единственный элемент $t|_V \in h_W(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории предпучков на X равен F .

Возьмём в качестве козамкнутой категории \mathcal{C} в [теор. 3.1](#) категорию $\mathcal{T}op(X)$ топологических пространств над X , объектами которой являются непрерывные отображения $p : Y \rightarrow X$ в категории $\mathcal{T}op$, а $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(p, q) = \{\psi \in \mathrm{Mor} \mathcal{T}op \mid q\psi = p\}$. Иначе говоря,

морфизм из $p : Y \rightarrow X$ в $q : Z \rightarrow X$ это непрерывное отображение $\psi : Y \rightarrow Z$, для каждого $x \in X$ переводящее слой $p^{-1}x$ в слой $q^{-1}x$. Имеется естественный функтор $G : \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{T}op(X)$ переводящий открытое подмножество $U \subset X$ в его тавтологическое вложение $U \hookrightarrow X$. Согласно теор. 3.1 этот функтор продолжается по непрерывности до функтора $G^\sim : pSh(X) \rightarrow \mathcal{T}op(X)$, который сопоставляет предпучку F на X топологическое пространство над X . Оно называется *эталным пространством* предпучка F , обозначается \mathcal{E}_F , и представляет собою копредел в категории $\mathcal{T}op(X)$ диаграммы GD_F , объектами которой являются тавтологические вложения $sU \hookrightarrow X$, по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого сечения $s \in F(U)$, а стрелками — включения $t|_U U \hookrightarrow tW$, по одному для каждого включения $U \hookrightarrow W$ и каждого сечения $t \in F(W)$. Слоем пространства \mathcal{E}_F над точкой $x \in X$ является копредел $\text{colim}_{U \ni x} F(U)$ индуктивной системы множеств сечений предпучка F над всеми открытыми окрестностями U точки x относительно отображений ограничения сечений, т. е. *слоем*¹ F_x предпучка F в точке x . Напомню, что он состоит из *ростков* сечений, т. е. из классов $s|_x$ сечений $s \in F(U)$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, если и только если $s|_V = t|_V$ на какой-нибудь открытой окрестности $V \subset U \cap W$ точки x . Таким образом, как множество

$$\mathcal{E}_F = \bigsqcup_{x \in X} F_x,$$

и проекция $\pi_F : \mathcal{E}_F \rightarrow X$ отображает все элементы слоя $F_x \subset \mathcal{E}_F$ в точку $x \in X$. Каждое сечение $s \in F(U)$ задаёт локальное отображение $s : U \rightarrow \mathcal{E}_F$, переводящее точку $x \in U$ в класс $s|_x \in F_x$ сечения s . Топология на пространстве \mathcal{E}_F определяется как слабейшая из топологий, в которых все такие локальные сечения $s : U \rightarrow \mathcal{E}_F$ непрерывны, т. е. множество $\mathcal{W} \subset \mathcal{E}_F$ открыто, если и только если для любого открытого подмножества $U \subset X$ и любого сечения $s \in F(U)$ прообраз множества \mathcal{W} при отображении

$$s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F, \quad x \mapsto s|_x,$$

открыт в U . Тем самым, базу открытых окрестностей точки $s|_x \in \mathcal{E}_F$, изображающей класс сечения $s \in F(U)$ над какой-либо открытой окрестностью $U \ni x$, составляют образы $s(W) \subset \mathcal{E}_F$ содержащихся в U открытых окрестностей $W \ni x$ при отображении $s : U \rightarrow \mathcal{E}_F$, задаваемом сечением s . В частности, проекция $\pi_F : \mathcal{E}_F \rightarrow X$ является *локальным гомеоморфизмом* в том смысле, что любая точка пространства \mathcal{E}_F обладает открытой окрестностью² \mathcal{W} , на которую проекция π_F ограничивается в гомеоморфизм $\pi_F|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \xrightarrow{\sim} \pi_F(\mathcal{W})$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Убедитесь, что пространство $\mathcal{E}_F = \bigsqcup_{x \in X} F_x$ с только что описанной топологией действительно является копределом диаграммы $GD_F : \mathcal{N}_F \rightarrow \mathcal{T}op(X)$. Согласно теор. 3.1 функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{T}op(X) \rightarrow pSh(X)$, который сопоставляет непрерывному отображению $p : Y \rightarrow X$ пучок его сечений³

$$h_Y^G = \Gamma_Y : U \mapsto \{s : U \rightarrow Y \mid ps = \text{Id}_U\},$$

¹См. прим. 2.12 на стр. 29.

²Более того, такую окрестность можно указать в любой наперёд заданной окрестности любой точки пространства \mathcal{E}_F .

³См. прим. 1.8 на стр. 9.

т. е. имеется функториальная по предпучку F на X и пространству Y над X биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_F, Y) = \text{Hom}_{pSh(X)}(F, \Gamma_Y). \quad (3-3)$$

В частности, функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ перестановочен с копределами, а $Y \mapsto \Gamma_Y$ — с пределами.

3.2. Пучки на топологическом пространстве. Поскольку предпучок сечений непрерывного отображения является пучком¹, композиция функторов Γ и \mathcal{E} из [прим. 3.3](#)

$$\Gamma \circ \mathcal{E} : pSh(X) \rightarrow Sh(X)$$

функториально сопоставляет каждому предпучку F пучок $F^S \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \circ \mathcal{E}(F)$, сечения которого над открытым множеством U суть непрерывные сечения $s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F$ этального пространства $\mathcal{E}_F \rightarrow X$ предпучка F . Такое сечение представляет собою семейство ростков $s(x) \in F_x$, занумерованных точками $x \in U$, в котором для каждой точки $y \in U$ найдется открытое $W \ni y$, $W \subset U$, и такое сечение $t \in F(W)$, что $s(x) = t|_x$ в F_x для всех $x \in W$. Иначе говоря, сечение пучка F^S над множеством U задаётся покрытием $\{W_\alpha \rightarrow U\}$ множества U семейством открытых множеств W_α и набором сечений $s_\alpha \in F(W_\alpha)$, согласованных на пересечениях, в том смысле, что $s_\alpha|_{W_\alpha \cap W_\beta} = s_\beta|_{W_\alpha \cap W_\beta}$ для всех α, β . Два таких набора данных задают одно и то же сечение, если и только если их ограничения на некоторое покрытие, вписанное в оба данных покрытия, совпадают.

В силу того, что функтор \mathcal{E} сопряжён слева функтору Γ , имеется естественное преобразование² $s : \text{Id}_{pSh(X)} \rightarrow \Gamma \circ \mathcal{E}$, т. е. функториальный по F морфизм предпучков $s : F \rightarrow F^S$, называемый *опучковыванием*. Над каждым открытым U он отображает $F(U)$ в $F^S(U)$, переводя $t \in F(U)$ в семейство его классов $t|_x$ в слоях F_x над всеми $x \in U$.

Упражнение 3.10. Покажите, что канонический морфизм $s : F \rightarrow F^S$ инъективен, если и только если предпучок F отделим³, и является изоморфизмом, если и только если F — пучок. В частности $F^{SS} \simeq F^S$.

Тем самым, ограничение композиции функторов $\Gamma\mathcal{E}$ на подкатегорию пучков естественно изоморфно тождественному функтору $\text{Id}_{Sh(X)}$. Этим мы наполовину доказали

Предложение 3.1

Ограничение функтора $\mathcal{E} : F \mapsto \mathcal{E}_F$ на полную подкатегорию пучков $Sh(X) \subset pSh(X)$ и ограничение функтора $\Gamma : Y \mapsto \Gamma_Y$ на полную подкатегорию локальных гомеоморфизмов в $\mathcal{T}op(X)$ являются квазиобратными друг другу эквивалентностями категорий.

Доказательство. Как мы уже отмечали перед [упр. 3.9](#) на стр. 38, проекция $p : \mathcal{E}_F \rightarrow X$ является локальным гомеоморфизмом для любого предпучка F на X . Так как функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $Y \mapsto \Gamma_Y$, имеется естественное преобразование $e : \mathcal{E} \circ \Gamma \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{T}op(X)}$, действие которого $e_Y : \mathcal{E}_{\Gamma_Y} \rightarrow Y$ над объектом $p : Y \rightarrow X$ переводит росток сечений $\sigma_x \in \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, лежащий в слое над точкой $x \in X$, в значение $s(x) \in Y$ любого локального сечения $s : U \hookrightarrow Y$, представляющего росток s_x . Если отображение

¹См. [прим. 1.8](#) на стр. 9.

²См. формулу (2-2) на стр. 18.

³См. [прим. 1.8](#) на стр. 9.

$p : Y \rightarrow X$ является локальным гомеоморфизмом, то имеется обратное к e_Y отображение $\varepsilon : Y \rightarrow \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, переводящее точку $y \in Y$ в лежащий в слое пучка Γ_Y над точкой $p(y)$ росток любой такой открытой окрестности U точки y , которая гомеоморфно отображается на $p(U) \subset X$ и тем самым может рассматриваться как проходящее через y локальное сечение отображения $p : Y \rightarrow X$ над открытой окрестностью $p(U) \ni p(y)$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Убедитесь, что e и ε непрерывны и обратны друг другу.

Тем самым, сужение $\mathcal{E}\Gamma$ на подкатегорию локальных гомеоморфизмов эквивалентно тождественному функтору. \square

СЛЕДСТВИЕ 3.1

Для любых пучков G, H на X и любых двух локальных гомеоморфизмов $Y \rightarrow X, Z \rightarrow X$ имеются функториальные изоморфизмы:

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(G, H) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_G, \mathcal{E}_H) \quad \text{и} \quad \text{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(\Gamma_Y, \Gamma_Z).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2

Функтор опучковывания $F \mapsto F^S$ сопряжён слева к вложению $\mathcal{S}h(X) \hookrightarrow p\mathcal{S}h(X)$, т. е. имеется функториальный по предпучку F и пучку G изоморфизм

$$\text{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, G) \simeq \text{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F^S, G).$$

В частности, опучковывание перестановочно с копределами, и естественное преобразование $s : F \rightarrow F^S$ универсально: любой морфизм $\varphi : F \rightarrow G$ предпучка F в пучок G имеет вид $\varphi = \varphi^S \circ s$ для единственного морфизма $\varphi^S : F^S \rightarrow G$.

Доказательство. Пользуясь функториальными по предпучку F и пучку G изоморфизмами $G \simeq G^S$ и $\text{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_F, \mathcal{E}_G) \simeq \text{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(\Gamma_{\mathcal{E}_F}, \Gamma_{\mathcal{E}_G})$, получаем $\text{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, G) \simeq \text{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, G^S) \simeq \text{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(F, \Gamma_{\mathcal{E}_G}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(\mathcal{E}_F, \mathcal{E}_G) \simeq \text{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(\Gamma_{\mathcal{E}_F}, \Gamma_{\mathcal{E}_G}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(F^S, G^S) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(F^S, G)$. \square

3.2.1. Локальность. Поскольку слой F_x предпучка F на топологическом пространстве X в точке $x \in X$ является копределом $F_x = \text{colim}_{U \ni x} F(U)$ прямой системы множеств $F(U)$ по всем открытым $U \ni x$, всякий морфизм предпучков $\varphi : F \rightarrow G$ в силу функториальности копредела задаёт морфизм слоёв $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$, переводящий росток сечения $s \in F(U)$ в росток сечения $\varphi_U(s) \in G(U)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2

Для того, чтобы два морфизма пучков $\varphi, \psi : F \rightarrow G$ на пространстве X совпадали, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in X$ совпадали индуцированные ими морфизмы слоёв $\varphi_x, \psi_x : F_x \rightarrow G_x$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для каждого открытого множества $U \subset X$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(U) \hookrightarrow & \prod_{x \in U} F_x & \\ \varphi_U \downarrow & \downarrow \prod \varphi_x & \\ G(U) \hookrightarrow & \prod_{x \in U} G_x & \end{array} \quad (3-4)$$

горизонтальные стрелки которой, отправляющие сечение в набор его ростков, инъективны в силу того, что F и G пучки.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12. Убедитесь в этом.

Тем самым, если правая вертикальная стрелка не меняется при замене φ на ψ , то и левая не меняется. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3

Для морфизма $\varphi : F \rightarrow G$ пучков на пространстве X инъективность (соотв. биективность) отображений $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ над всеми открытыми $U \subset X$ равносильна инъективности (соотв. биективности) отображений слоёв $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$ над всеми точками $x \in X$.

Доказательство. Импликация \Rightarrow вытекает из упр. 2.19 на стр. 33. Докажем противоположную импликацию. Утверждение про инъективность очевидно: если в предыдущей диаграмме (3-4) правая вертикальная стрелка инъективна, то инъективна и левая. Пусть в диаграмме (3-4) правая вертикальная стрелка биективна. Тогда для любого сечения $s \in G(U)$ у каждой точки $x \in U$ есть открытая окрестность $W_x \ni x$, $W_x \subset U$, с таким сечением $t_x \in F(W_x)$, что класс сечения $\varphi_W(t_x) \in G(W_x)$ в слое G_x равен $s|_{W_x}$. Для любых точек $x, y \in U$ классы сечений t_x и t_y совпадают в слоях F_z над всеми точками $z \in W_x \cap W_y$, поскольку совпадают их образы в слоях G_z . Поэтому, в силу инъективности горизонтальных стрелок, ограничения сечений t_x и t_y на пересечение $W(x) \cap W(y)$ равны. Тем самым, существует и единственно сечение $t \in F(U)$, ограничивающееся в сечении t_x над W_x сразу для всех $x \in U$. В силу коммутативности диаграммы (3-4), $\varphi_U(t) = s$, что доказывает биективность φ_U . \square

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ 3.1. Из сюръективности отображений слоёв $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$ над всеми точками $x \in X$, вообще говоря, *не следует*, что отображения $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ сюръективны над *всеми* открытыми $U \subset X$. Рассмотрим, например, на окружности S^1 пучок \mathcal{C} гладких вещественных функций и пучок Ω гладких дифференциальных 1-форм. Оператор дифференцирования $d : \mathcal{C} \rightarrow \Omega$, $f \mapsto df$, локально эпиморфен, однако его действие над всей окружностью $d_{S^1} : \mathcal{C}(S^1) \rightarrow \Omega(S^1)$ не эпиморфно: дифференциал длины дуги¹ $d\ell \in \Omega(S^1)$ не является дифференциалом ни от какой функции $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку

$$\int_{S^1} df = f(2\pi) - f(0) = 0, \quad \text{а} \quad \int_{S^1} d\ell = 2\pi.$$

3.3. Прямой и обратный образ. С каждым функтором $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ между произвольными малыми категориями \mathcal{U} , \mathcal{W} естественно связан функтор *подъёма предпучков*

$$\Phi^* : pSh(\mathcal{W}) \rightarrow pSh(\mathcal{U}), \quad S \mapsto S\Phi. \quad (3-5)$$

¹Значение дифференциальной формы $d\ell$ в каждой точке $p \in S^1$ на единичном векторе скорости, направленном против часовой стрелки, равно 1. Эквивалентно, значение формы $d\ell$ в точке $p \in S^1$ равно дифференциалу функции длины $\ell : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, которая определена на некоторой дуге $[a, b] \subset S^1$, содержащей точку p строго внутри так, что движение $a \rightarrow p \rightarrow b$ происходит против часовой стрелки, и сопоставляет точке $t \in [a, b]$ длину дуги $[a, t]$ (обратите внимание, что хотя сама функция ℓ зависит от выбора точки a , её дифференциал $d\ell$ от этого выбора не зависит).

ЛЕММА 3.2

У функтора (3-5) есть левый сопряжённый функтор $\Phi_* : pSh(\mathcal{U}) \rightarrow pSh(\mathcal{W})$, переводящий предпучок $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \rightarrow Set$ в копредел диаграммы $\mathcal{N}_F \rightarrow pSh(\mathcal{W})$, объектами которой являются представимые предпучки $sh_{\Phi(U)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\Phi(U)}$ на \mathcal{W} , по одному для каждого $U \in \text{Ob } \mathcal{U}$ и каждого $s \in F(U)$, а стрелками служат отображения

$$\Phi(\varphi)_* : (t\varphi)h_{\Phi(U)} \rightarrow th_{\Phi(V)}, \quad (t\varphi)\psi \mapsto t(\Phi(\varphi)\psi),$$

по одному для каждой стрелки $\varphi : U \rightarrow V$ категории \mathcal{U} и каждого $t \in F(V)$.

Доказательство. Применим теор. 3.1 на стр. 35 к категории $\mathcal{C} = pSh(\mathcal{W})$ и функтору

$$G : \mathcal{U} \rightarrow pSh(\mathcal{W}), \quad U \mapsto h_{\Phi(U)}.$$

В этом случае для каждого предпучка $S \in \text{Ob } pSh(\mathcal{W})$ предпучок $h_S^G \in \text{Ob } pSh(\mathcal{U})$ канонически изоморфен подъёму $\Phi^* S$, т. к. по лемме Йонеды имеется функториальный по U и S изоморфизм $h_S^G(U) = \text{Hom}_{pSh(\mathcal{W})}(G(U), S) = \text{Hom}_{pSh(\mathcal{W})}(h_{\Phi(U)}, S) \simeq S\Phi(U)$. Таким образом, функтор $h_*^G : pSh(\mathcal{W}) \rightarrow pSh(\mathcal{U})$, $S \mapsto h_S^G$, канонически изоморфен функтору подъёма $\Phi^* : S \mapsto S\Phi$. Согласно теор. 3.1 левый сопряжённый к нему функтор $\Phi_* = G^\sim : pSh(\mathcal{U}) \rightarrow pSh(\mathcal{W})$ переводит предпучок $F \in \text{Ob } pSh(\mathcal{U})$ в копредел диаграммы GD_F , которая выглядит именно так, как указано в формулировке леммы. \square

3.3.1. Прямой образ предпучка при непрерывном отображении. По определению, каждое непрерывное отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ задаёт функтор, действующий между их категориями открытых множеств в противоположном к f направлении

$$f^{-1} : \mathcal{U}(Y) \rightarrow \mathcal{U}(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U).$$

Подъём предпучка $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \rightarrow Set$ на пространстве X вдоль этого функтора называется *прямым образом*¹ предпучка F и обозначается

$$f_* F \stackrel{\text{def}}{=} (f^{-1})^* F = F \circ f^{-1} : \mathcal{U}(Y)^{\text{opp}} \rightarrow Set.$$

Множества его сечений над открытыми $U \subset Y$ суть $f_* F(U) \stackrel{\text{def}}{=} F(f^{-1}(U))$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Проверьте, что прямой образ пучка тоже является пучком.

Например, когда $f : Z \hookrightarrow Y$ является вложением замкнутого подмножества, для любого предпучка абелевых групп F на Z слои

$$f_* F_y = \begin{cases} 0 & \text{при } y \notin Z \\ F_y & \text{при } y \in Z. \end{cases}$$

По этой причине пучок $f_* F$ называется *продолжением нулём* на X пучка F с $Z \subset X$. Когда $f : U \hookrightarrow Y$ является вложением открытого подмножества и $F \in pSh(U)$, слои $f_* F_u$ над всеми точками $u \in U$ также совпадают со слоями F_u , однако над точками $x \notin U$ слои $f_* F_x = \text{colim}_{W \ni x} F(U \cap W)$, вообще говоря, могут быть и ненулевыми.

¹По-английски *direct image* или *push forward*.

3.3.2. Обратный образ предпучка при непрерывном отображении. Согласно лем. 3.2 функтор $f_* = (f^{-1})^*$ прямого образа предпучков вдоль непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ обладает левым сопряжённым функтором. Этот функтор называется *обратным образом*¹ предпучков при отображении f и обозначается

$$f^* \stackrel{\text{def}}{=} (f^{-1})_* : pSh(Y) \rightarrow pSh(X).$$

Для заданного предпучка F на Y предпучок f^*F на X является копределом диаграммы представимых предпучков, объекты которой имеют вид $sh_{f^{-1}(U)}$, по одному для каждого открытого $U \supset Y$ и каждого сечения $s \in F(U)$, а стрелки суть естественные преобразования $t|_U h_{f^{-1}(U)} \rightarrow th_{f^{-1}(W)}$, по одному для каждого вложения $U \hookrightarrow W$ открытых множеств в Y и каждого сечения $t \in F(W)$. Множества сечений этих предпучков над открытым множеством $V \subset X$ образуют диаграмму множеств, непустыми объектами которой являются одноточечные множества $sh_{f^{-1}(U)}(V)$, по одному для каждого открытого $U \supset f(V)$ в Y и каждого $s \in F(U)$, а стрелки переводят единственный элемент множества $s|_W h_{f^{-1}(U)}(V)$ в единственный элемент множества $th_{f^{-1}(W)}(V)$ для всех открытых $W \supset U \supset f(V)$ и всех $t \in F(W)$. Копредел такой диаграммы совпадает со слоем

$$\text{colim}_{U \supset f(V)} F(U) = F_{f(V)}$$

пучка F над множеством $f(V) \subset Y$. Поэтому, согласно сл. 2.2 на стр. 31 множество сечений предпучка f^*F над открытым $V \subset X$ это слой пучка F над (не обязательно открытым!) образом $f(V) \subset Y$ множества V :

$$f^*F(V) = F_{f(V)} = \text{colim}_{U \supset f(V)} F(U). \quad (3-6)$$

В частности, в каждой точке $x \in X$ слой $f^*F_x = F_{f(x)}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Убедитесь непосредственно, что для любого предпучка F на Y множества (3-6) образуют предпучок на X и постройте естественную по $F \in pSh(Y)$ и $G \in pSh(X)$ биекцию $\text{Hom}_{pSh(X)}(f^*F, G) = \text{Hom}_{pSh(Y)}(F, f_*G)$.

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ 3.2. Если предпучок F на Y является пучком, то его обратный образ f^*F , определённый по формуле (3-6), может и не быть пучком на X . Например, при отображении двухточечного множества (с дискретной топологией) в одноточечное обратным образом постоянного пучка является постоянный предпучок, а не постоянный пучок.

3.3.3. Пучковый обратный образ. По определению, *пучковым* обратным образом (пред)пучка F на топологическом пространстве Y при непрерывном отображении $f : X \rightarrow Y$ называется опучковывание f^*F^S предпучка f^*F на X , заданного формулой (3-6). Так как прямой образ любого пучка G на X является пучком² на Y и функтор опучковывания сопряжён слева к строго полному вложению категории пучков в категорию предпучков, имеют место канонические изоморфизмы

$$\text{Hom}_{Sh(X)}(f^*F^S, G) \simeq \text{Hom}_{pSh(X)}(f^*F, G) \simeq \text{Hom}_{pSh(Y)}(F, f_*G) \simeq \text{Hom}_{Sh(Y)}(F, f_*G),$$

¹По-английски *pull back*.

²Согласно упр. 3.13 выше.

означающие, что пучковый обратный образ сопряжён слева к ограничению функтора прямого образа на подкатегорию пучков. Всюду, когда речь идёт о пучках, под обратным образом пучка понимается именно пучковый обратный образ, и индекс « s » в обозначении f^*F^s опускается, т. е.

$$\text{для пучков } f^*F \stackrel{\text{def}}{=} f^*F^s.$$

Согласно п° 3.2 на стр. 39 сечениями пучкового обратного образа f^*F над открытым множеством $U \subset X$ являются такие занумерованные точками $x \in U$ семейства ростков $s_x \in F_{f(x)}$, что для каждой точки $u \in U$ имеются открытая окрестность $V \ni u$ точки u в U , открытая окрестность $W \supset f(V)$ образа окрестности V в Y , а также сечение $t \in F(W)$, класс которого в слое $F_{f(x)}$ равен s_x для всех $x \in V$.

Иначе пучковый обратный образ можно определить как пучок сечений канонической проекции $X \times_Y \mathcal{E}_F \rightarrow X$ послойного произведения топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ и $\mathcal{E}_F \rightarrow Y$ над Y .

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Для любого предпучка F на Y постройте в категории $\mathcal{T}op(X)$ функториальный по F изоморфизм $X \times_Y \mathcal{E}_F \simeq \mathcal{E}_{f^*F}$.

Обратите внимание, что пучковый обратный образ определён для любого предпучка и всегда является пучком. В частности, опучковывание F^s предпучка F на X можно воспринимать как пучковый обратный образ Id_X^*F при тождественном отображении.

3.3.4. Ограничение на открытые и замкнутые подмножества. В ситуации, когда $f : Q \hookrightarrow X$ является вложением открытого или замкнутого подмножества, функтор обратного образа $f^* : \mathcal{S}h(X) \rightarrow \mathcal{S}h(Q)$ называется *ограничением* пучков с X на Q .

Ограничение любого пучка множеств F с X на открытое подмножество $f : U \hookrightarrow X$ имеет над всеми открытыми $W \subset U$ те же множества сечений, что и пучок F , т. е. $f^*F(W) = F(W)$. В частности, для всех $x \in U$ слой $f^*F_x = F_x$.

При соблюдении подходящих условий конечности, ограничение пучков на замкнутые подмножества также ведёт себя интуитивно ожидаемым образом. Напомню, что топологическое пространство называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если у любой его точки есть открытая окрестность с компактным замыканием.

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Убедитесь, что все открытые и замкнутые подмножества локально компактного пространства X тоже локально компактны, и в каждой открытой окрестности любого компакта $C \subset X$ есть компакт, для которого все точки из C являются внутренними.

Предложение 3.4

Пусть $f : Z \hookrightarrow X$ это вложение компактного замкнутого подмножества Z в локально компактное топологическое пространство X . Тогда для любого пучка множеств F на X множество глобальных сечений пучка f^*F на Z находится в естественной биекции со слоем пучка F над Z , т. е. $f^*F(Z) \simeq F_Z$.

Доказательство. Поскольку сечения пучка F над всеми открытыми $U \supset Z$ ограничи-

ваются в глобальные сечения пучка f^*F , имеется канонический морфизм

$$\varphi : F_Z = \lim_{U \supset Z} F(U) \rightarrow f^*F(Z). \quad (3-7)$$

Если ростки сечений $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$ над открытыми $U, W \supset Z$ совпадают в слоях F_Z над всеми точками $z \in Z$, то у каждой точки z найдётся открытая в X окрестность $V_z \ni z$, на которую оба сечения ограничиваются одинаково: $s|_{V_z} = t|_{V_z}$. Беря объединение всех этих окрестностей, мы получаем открытое множество $V \supset Z$ с $s|_V = t|_V$, что влечёт совпадение классов сечений s и t в слое F_Z и тем самым доказывает инъективность морфизма (3-7). Чтобы установить его сюръективность, рассмотрим произвольное сечение $s \in f^*F(Z)$. Для каждой точки $z \in Z$ найдутся компактная окрестность¹ C_z точки z в пространстве Z , открытое в X множество $V_z \supset C_z$ и сечение $s_z \in F(V_z)$, класс которого во всех слоях F_x над точками $x \in C_z$ совпадает с классом сечения s . Выберем конечное множество $C_{z_1}, C_{z_2}, \dots, C_{z_n}$ покрывающих Z компактов C_z . Достаточно построить открытое в X множество $W \supset Z$ и сечение $t \in F(W)$, которое при каждом i ограничивается на некоторое открытое в V_{z_i} подмножество $V \supset C_i$ точно также, как и сечение s_{z_i} . Тогда образом класса сечения t в слое F_Z при морфизме (3-7) будет в точности сечение s .

Индукция по n сводит построение к случаю $n = 2$: достаточно для любой пары компактных подмножеств $C_1, C_2 \subset X$ и сечений $s_1 \in F(V_1), s_2 \in F(V_2)$, заданных на открытых в X множествах $V_1 \supset C_1, V_2 \supset C_2$ и имеющих равные ростки в слоях F_x над всеми точками $x \in C_1 \cap C_2$, построить открытое в X множество $W \supset C_1 \cup C_2$ и сечение $t \in F(W)$, которое ограничивается на какие-либо открытые в V_i подмножества $W_i \supset C_i$ точно также, как сечение s_i . Рассуждение, использованное при доказательстве инъективности морфизма (3-7), позволяет построить открытое в $V_1 \cap V_2$ подмножество $V \supset C_1 \cap C_2$ и такое сечение $t_V \in F(V)$, что $s_1|_V = s_2|_V = t_V$. По той же причине и в силу [упр. 3.16](#) непересекающиеся друг с другом компакты $C_i \setminus V$ обладают непересекающимися друг с другом открытыми в V_i окрестностями $U_i \supset (C_i \setminus V)$, над которыми существуют сечения $t_i \in F(U_i)$ с $s_i|_{U_i} = t_i$. Поскольку сечения t_1, t_V, t_2 согласованы на непустых пересечениях $U_1 \cap V$ и $V \cap U_2$, а пересечение $U_1 \cap U_2$ пусто, над объединением $W = U_1 \cup V \cup U_2$ эти три сечения однозначно склеиваются в искомое сечение $t \in F(W)$. \square

¹Т. е. компакт, содержащий некоторую открытую окрестность точки z .

Ответы и указания к некоторым упражнениям