

§5. Элементы гомологической алгебры

5.1. Исчисление градуированных объектов. Под *градуированным K -модулем* мы понимаем прямую сумму K -модулей $V = \bigoplus_{v \in \mathbb{Z}} V^v$, элементы которой суть *конечные* суммы вида $v_{v_1} + v_{v_2} + \dots + v_{v_m}$, в которых каждый $v_d \in V^d$. Векторы $v_d \in V^d$ называются *однородными* степени d , и степень однородного вектора обозначается $|v_d| \stackrel{\text{def}}{=} d$. Если компоненты $V^d = 0$ при всех $d \ll 0$ (соотв. при всех $d \gg 0$) градуированный модуль V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*). Через $V[k]$ обозначается градуированный модуль с компонентами $V[k]^v \stackrel{\text{def}}{=} V^{v+k}$.

Гомоморфизм градуированных модулей $f : V \rightarrow W$ называется *однородным* степени m , если $f(V^v) \subset W^{v+m}$ при всех v . Например, *сдвиг градуировки* $s : V \rightarrow V[1]$, тождественно действующий на элементы модуля: $s(v) \stackrel{\text{def}}{=} v$, однороден степени -1 . Все K -линейные гомоморфизмы $V \rightarrow W$ образуют градуированный K -модуль

$$\text{GrHom}(V, W) = \bigoplus_v \text{GrHom}^v(V, W), \quad (5-1)$$

компонента степени v которого состоит из однородных гомоморфизмов v -той степени. Поскольку при композиции однородных гомоморфизмов $|fg| = |f| + |g|$, эндоморфизмы градуированного модуля V образуют *градуированную алгебру* $\text{GrEnd}(V)$, в которой $\text{GrEnd}^v(V) \cdot \text{GrEnd}^\mu(V) \subset \text{GrEnd}^{v+\mu}(V)$.

Тензорное произведение¹ $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ градуированных модулей V_i определяется как градуированный модуль с компонентами

$$(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n)^v \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum v_i=v} V_1^{v_1} \otimes V_2^{v_2} \otimes \dots \otimes V_n^{v_n}.$$

5.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными модулями мы по умолчанию используем так называемые s -версии² стандартных полилинейных операций линейной алгебры, которые получаются из обычных применением *кошулева правила знаков*: если некая операция над буквами f_1, f_2, \dots, f_n определяется в неградуированной теории как линейная комбинация (некоммутативных) мономов от этих букв, в которой все мономы отличаются друг от друга перестановками букв, то в s -версии такой операции каждая транспозиция букв f_ν и f_μ дополнительно сопровождается умножением соответствующего монома на $(-1)^{|f_\nu| \cdot |f_\mu|}$. Например, s -коммутатор однородных эндоморфизмов градуированного модуля определяется как

$$[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} f \circ g - (-1)^{|f| \cdot |g|} g \circ f,$$

а s -правило *Лейбница* для однородного оператора F на градуированной алгебре выглядит так:

$$F(ab) = (Fa)b + (-1)^{|F| \cdot |a|} a(Fb).$$

Аналогично, результат применения тензорного произведения $f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n$ однородных гомоморфизмов $f_i : V_i \rightarrow V_i$ к тензорному моному

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$$

¹По умолчанию, все тензорные произведения берутся в категории K -модулей.

²Т. е. подкрученные на знак (*sign*) или, как ещё говорят, *супер-* (или *skew-*) версии тензорных операций.

из однородных векторов v_i определяется как

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_m (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\varepsilon f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_m(v_m), \quad (5-2)$$

где $\varepsilon = |f_m|(|v_1| + \cdots + |v_{m-1}|) + |f_{m-1}|(|v_1| + \cdots + |v_{m-2}|) + \cdots + |f_2||v_1|$. Аналогично вычисляется и композиция тензорных мономов от гомоморфизмов:

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_m) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\varepsilon (f_1 \circ g_1) \otimes \cdots \otimes (f_m \circ g_m) \quad (5-3)$$

где $\varepsilon = |f_m|(|g_1| + \cdots + |g_{m-1}|) + |f_{m-1}|(|g_1| + \cdots + |g_{m-2}|) + \cdots + |f_2||g_1|$.

5.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный K -модуль V , оснащённый однородным K -линейным оператором $d : V \rightarrow V$ степени $|d| = 1$ с $d^2 = 0$ называется *комплексом*. Действие оператора d удобно изображать диаграммой

$$\cdots \xrightarrow{d} V^{v-1} \xrightarrow{d} V^v \xrightarrow{d} V^{v+1} \xrightarrow{d} \cdots . \quad (5-4)$$

Равенство $d^2 = 0$ означает, что $\ker d \supset \text{im } d$. Оператор d с таким свойством называется *дифференциалом*. Фактор модуль $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d / \text{im } d$ называется *модулем когомологий* комплекса V . Он естественно градуирован:

$$H(V) = \bigoplus H^v(V), \quad \text{где } H^v(V) = \frac{\ker(d : V^v \rightarrow V^{v+1})}{\text{im}(d : V^{v-1} \rightarrow V^v)}.$$

Элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\text{im } d$ — *кограницами*. Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \text{im } d$, комплекс V называется *точным* или *ациклическим*.

Замечание 5.1. Формально, комплекс можно определить в любой категории как последовательность стрелок (5-4) со свойством $d^2 = 0$, а когомологии комплекса — в любой точной категории. Все обсуждаемые в этом параграфе свойства когомологий справедливы для любой абелевой категории.

Замечание 5.2. Иногда бывает удобно считать, что степень дифференциала не $+1$, а -1 . В этом случае однородные компоненты комплекса принято нумеровать нижними индексами, а дифференциал обозначать буквой ∂ , так что диаграмма (5-4) превращается в $\cdots \xrightarrow{\partial} V_{v+1} \xrightarrow{\partial} V_v \xrightarrow{\partial} V_{v-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$. Соответствующие факторы

$$H_v(V) = \frac{\ker(\partial : V_v \rightarrow V_{v-1})}{\text{im}(\partial : V_{v+1} \rightarrow V_v)}$$

называют *гомологиями*, элементы из $\ker \partial$ — *циклами*, а элементы из $\text{im } \partial$ — *границами*¹. Одни обозначения превращаются в другие формальной сменой знака у всех индексов с одновременным их опусканием или поднятием.

Пример 5.1 (цепной комплекс симплициального множества)

Пусть $X : \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{S}et$ — симплициальное множество², и K -произвольное коммутативное кольцо. Обозначим через $C_n = C_n(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} K \otimes X_n$ свободный K -модуль с базисом

¹И только комплексы так и остаются комплексами ☺

²См. прим. 1.7 на стр. 8.

$X_n = X([n])$. Он называется модулем n -мерных цепей симплициального множества X с коэффициентами из K . Линейный оператор $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$, действие которого на базисный вектор $x \in X_n$ задаётся правилом

$$\partial x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^i X(\partial_i)x, \quad (5-5)$$

где $\partial_i : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, не содержащее в образе числа i , называется *граничным оператором*. Он сопоставляет ориентированному симплексу его ориентированную границу¹ и имеет $\partial^2 = 0$.

Упражнение 5.1. Убедитесь в этом.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K . В случае, когда $X = S(X)$ является множеством сингулярных симплексов² топологического пространства X , эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* топологического пространства X с коэффициентами в K и обозначаются $H_n(X, K)$. Аналогичная конструкция имеет смысл и для полусимплициальных множества $X : \Delta_s^{\text{opp}} \rightarrow \text{Set}$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* соответствующего триангулированного пространства $|X|$.

Упражнение 5.2. Вычислите симплициальные гомологии тора из [прим. 1.6](#) на стр. 7, триангулированного как на [рис. 1♦1](#) и [рис. 1♦2](#) на стр. 7.

ПРИМЕР 5.2 (ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ)

На тензорном произведении $U \otimes V$ комплексов U и V имеется каноническая структура комплекса с дифференциалом

$$d = d_{U \otimes V} \stackrel{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V. \quad (5-6)$$

Равенство $d^2 = 0$ обеспечивается кошулевым правилом знаков, согласно которому

$$(1 \otimes d_V) \circ (d_U \otimes 1) = -d_U \otimes d_V,$$

ибо $|d_U| = |d_V| = 1$. Поэтому $d^2 = d_U^2 \otimes 1 + d_U \otimes d_V - d_U \otimes d_V + 1 \otimes d_V^2 = 0$. Отметим, что в силу того же правила знаков результат применения обеих частей формулы (5-6) к однородным элементам выглядит так:

$$d(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v).$$

Аналогично определяется тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m$ любого множества комплексов. Дифференциал на нём продолжает дифференциалы $d_i : V_i \rightarrow V_i$ по s -правилу Лейбница и равен

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^m 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$$

(отдельные слагаемые написанной суммы перемножаются и применяются к элементам с учётом кошулева правила знаков).

¹Например, границей треугольника будет его контур, обходимый в порядке возрастания номеров вершин.

²См. [прим. 2.3](#) на стр. 22.

5.1.3. Мультикомплексы. Мы называем m -комплексом \mathbb{Z}^m -градуированный K -модуль $V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^m} V^\mu$, на котором заданы однородные K -линейные дифференциалы

$$d_1, d_2, \dots, d_m : V \rightarrow V,$$

степенями которых являются стандартные базисные векторы в \mathbb{Z}^m , т. е.

$$d_i(V^\mu) \subset V^{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i+1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m}$$

и которые удовлетворяют соотношениям грасмановой алгебры с m образующими, т. е. $d_i d_j + d_j d_i = 0$ и $d_i^2 = 0$ для всех i, j . Чаще всего мы будем иметь дело с бикомплексами $V = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$, на которых действует пара дифференциалов $d_1, d_2 : V \rightarrow V$, таких

что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$, $d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q}$, $d_2(V^{p,q}) \subset V^{p,q+1}$.

С каждым m -комплексом V можно связать обычный \mathbb{Z} -градуированный комплекс $\text{Tot } V$, называемый *свёрткой* или *тотальным комплексом* m -комплекса V и имеющий

$$\text{Tot}^\nu V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m} \quad \text{и} \quad d_{\text{Tot}} = \sum d_i : \text{Tot}^\nu V \rightarrow \text{Tot}^{\nu+1} V.$$

Например, попарные тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, и тензорное произведение комплексов $U \otimes V$ из предыдущего прим. 5.2 представляет собою тотальный комплекс этого бикомплекса.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Убедитесь, что для любых двух комплексов (U, d_U) и (W, d_W) модули $H^{p,q} = \text{Hom}(U^{-p}, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 : \varphi \mapsto (-1)^{q+p} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 : \varphi \mapsto \partial_W \circ \varphi.$$

5.2. Категории комплексов. В гомологической алгебре рассматриваются три разных категории комплексов с одним и тем же классом объектов — комплексами K -модулей, но с разными классами морфизмов.

5.2.1. DG-категория комплексов. Аддитивная категория \mathcal{C} , в которой на каждом множестве стрелок $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеется структура комплекса, а дифференциалы композиций вычисляются по s -правилу Лейбница:

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi) \quad (5-7)$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG-*) категорией. Примером такой категории является *DG-категория комплексов*, объектами которой являются комплексы K -модулей (V, d_V) , а морфизмами из (U, d_U) в (W, d_W) являются произвольные K -линейные гомоморфизмы $U \rightarrow W$, образующие градуированный модуль (5-1)

$$\text{Hom}_{\text{DG}}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \text{GrHom}(V, W) = \bigoplus_{\nu} \text{GrHom}^{\nu}(V, W) \quad (5-8)$$

с дифференциалом $d : \text{GrHom}^{\nu}(V, W) \rightarrow \text{GrHom}^{\nu+1}(V, W)$, переводящим однородный морфизм $\psi : V \rightarrow W$ в его s -коммутатор с дифференциалами:

$$\psi \mapsto [d, \psi] \stackrel{\text{def}}{=} d_W \circ \psi - (-1)^{|\psi|} \psi \circ d_V.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.4. Убедитесь, что комплекс $\text{Hom}_{\text{DG}}(V, W)$ является свёрткой бикомплекса $\text{Hom}(U^p, W^q)$ из упр. 5.3, и проверьте, что $d^2 = 0$ и что дифференциал композиции вычисляется по s-правилу Лейбница (5-7).

Мы будем использовать обозначение $\text{Hom}_{\text{DG}}^{\nu}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \text{GrHom}^{\nu}(V, W)$ для однородных компонент комплекса $\text{Hom}_{\text{DG}}(V, W)$.

5.2.2. Просто категория комплексов обозначается Com и имеет морфизмами K -линейные отображения степени нуль, перестановочные с дифференциалами:

$$\text{Hom}_{\text{Com}}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\text{DG}}^0(V, W) \cap \ker d = \{ \varphi : V \rightarrow W \mid \forall \nu \varphi(V^{\nu}) \subset W^{\nu} \ \& \ d_W \varphi = \varphi d_V \}.$$

Такие отображения называются *морфизмами комплексов*. Очевидно, что морфизмы комплексов образуют абелеву подгруппу в $\text{Hom}_{\text{DG}}(V, W)$. Прямая сумма $V \oplus W$ комплексов U и V определяется как их прямая сумма в категории градуированных K -модулей, т. е. имеет $U^{\nu} \oplus W^{\nu}$ в качестве компоненты степени ν , и снабжается дифференциалом $d_U \oplus d_W$. Таким образом, категория комплексов аддитивна. Ядро и коядро морфизма комплексов $\varphi : V \rightarrow W$ тоже определяются как ядро и коядро в категории градуированных K -модулей и снабжаются дифференциалами, индуцированными дифференциалами комплексов V и W соответственно.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Убедитесь, что $\ker \varphi_{\nu} \subset V^{\nu}$ образуют подкомплекс¹ в V , а дифференциал d_W корректно задаёт структуру комплекса на факторе $W/\varphi(V)$.

Поскольку в категории градуированных модулей² выполняется основная теорема о строении гомоморфизма, она выполняется и в категории комплексов. Таким образом, категория комплексов абелева. Точно так же проверяется, что и для любой абелевой категории \mathcal{A} категория $\text{Com}(\mathcal{A})$ комплексов из объектов категории \mathcal{A} тоже абелева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1

Каждый морфизм комплексов $\varphi : V \rightarrow W$ корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \rightarrow H(W)$, переводящий класс коцикла ξ в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d_V \xi = 0$, то и $d_W \varphi \xi = \varphi d_V \xi = 0$, т. е. $\varphi(\xi)$ является коциклом. При замене коцикла ξ на когомологичный коцикл $\xi + d_V \zeta$ образ $\varphi(\xi + d_V \zeta) = \varphi(\xi) + \varphi(d_V \zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ когомологичен образу $\varphi(\xi)$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2

С любой точной тройкой комплексов $0 \rightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \rightarrow 0$ функториально³ связана длинная точная последовательность когомологий

$$\dots \xrightarrow{\varphi_*} H^i(V) \xrightarrow{\psi_*} H^i(W) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(V) \xrightarrow{\psi_*} \dots, \quad (5-9)$$

в которой *связывающий гомоморфизм* $\delta : H^i(W) \rightarrow H^{i+1}(U)$ индуцирован дифференциалом комплекса V , т. е. переводит когомологический класс коцикла $\psi(\eta) \in \ker d_W$ в когомологический класс коцикла $d_V(\eta) \in \ker d_U$.

¹т. е. d_V переводит $\ker \varphi_{\nu}$ в $\ker \varphi_{\nu+1}$

²с сохраняющими градуировку гомоморфизмами K -модулей в качестве стрелок

³в том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных трёхчленных комплексов в категорию точных комплексов (в качестве стрелок в обеих категориях рассматриваются морфизмы комплексов)

Доказательство. Корректность определения гомоморфизма δ проверяется ползанием по коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{array}{ccccc}
 & \uparrow d_U & & \uparrow d_V & & \uparrow d_W \\
 U^{i+1} & \xrightarrow{\varphi} & V^{i+1} & \xrightarrow{\psi} & W^{i+1} \\
 \uparrow d_U & & \uparrow d_V & & \uparrow d_W \\
 U^i & \xrightarrow{\varphi} & V^i & \xrightarrow{\psi} & W^i \\
 \uparrow d_U & & \uparrow d_V & & \uparrow d_W \\
 U^{i-1} & \xrightarrow{\varphi} & V^{i-1} & \xrightarrow{\psi} & W^{i-1} \\
 \uparrow d_U & & \uparrow d_V & & \uparrow d_W
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.6. Убедитесь, что при $d_W \psi \eta = 0$ образ $d_V(\eta)$ лежит в $\ker d_U \subset U \subset V$ и не меняется при добавлении к η кограницы, а при $\psi \eta_1 = \psi \eta_2$ их образы $d_V(\eta_1)$ и $d_V(\eta_2)$ когомологичны в U .

Функториальная зависимость морфизмов φ_* , ψ_* и δ от точной тройки очевидна из их конструкции, как и то, что последовательность (5-9) является комплексом. Проверку его точности мы оставляем читателю. \square

УПРАЖНЕНИЕ 5.7. Проверьте точность последовательности (5-9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 (СДВИГ ГРАДУИРОВКИ)

Функтор сдвига $S : Com \rightarrow Com$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^v = V^{v+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что отображение сдвига $s : V \rightarrow V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, V[1])$, s -коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим. Его итерации обозначаются $S^k V = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 5.3 (КОНУС МОРФИЗМА)

С каждым морфизмом комплексов $\varphi : U \rightarrow W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$\begin{array}{ccc}
 -d_U \uparrow & & \uparrow d_W \\
 U^{i+1} & \xrightarrow{\varphi} & W^{i+1} \\
 -d_U \uparrow & & \uparrow d_W \\
 U^i & \xrightarrow{\varphi} & W^i \\
 -d_U \uparrow & & \uparrow d_W \\
 U^{i-1} & \xrightarrow{\varphi} & W^{i-1} \\
 -d_U \uparrow & & \uparrow d_W
 \end{array} \tag{5-10}$$

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\text{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль $\text{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\text{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\text{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \rightarrow U[1] \oplus W, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \text{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\text{Con}(\varphi)$ и фактор $\text{Con}(\varphi)/W \simeq U[1]$, однако точная тройка комплексов

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{\iota_\varphi} \text{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \rightarrow 0, \quad (5-12)$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории $\mathcal{C}om$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (5-12) имеет вид

$$\dots \rightarrow H^i(\text{Con} \varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} H^{i+1}(\text{Con} \varphi) \rightarrow \dots, \quad (5-13)$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \rightarrow H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_* .

УПРАЖНЕНИЕ 5.8. Убедитесь в этом.

5.2.3. Гомотопическая категория комплексов обозначается $\mathcal{H}o$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов Hom_{DG} :

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}o}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(\text{Hom}_{\text{DG}}(V, W)) = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}om}(V, W)}{\text{im}(d : \text{Hom}_{\text{DG}}^{-1}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\text{DG}}^0(V, W))}.$$

Иначе говоря, морфизмы в гомотопической категории $\mathcal{H}o$ суть морфизмы комплексов $\varphi : V \rightarrow W$, рассматриваемые с точностью до сложения с морфизмами вида $[d, \gamma] = d_W \gamma - \gamma d_V$, где $\gamma : V \rightarrow W$ — любое K -линейное отображение степени -1 . Морфизмы комплексов вида $[d, \gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ с гомотопной нулю разностью $\varphi - \psi = [d, \gamma]$ называются *гомотопными*, а отображение γ называется в этой ситуации *гомотопией* между φ и ψ , что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{H}o$ это морфизмы комплексов с точностью до гомотопии.

УПРАЖНЕНИЕ 5.9. Убедитесь, что гомотопные нулю морфизмы образуют двусторонний идеал в $\text{Mor}(\mathcal{C}om)$, т. е. $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0 \Rightarrow \varphi \psi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta \varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ для всех таких стрелок $\psi, \eta \in \text{Mor}(\mathcal{C}om)$, что композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Тем самым, композиция морфизмов корректно определена на классах гомотопных морфизмов, и $\mathcal{H}o$ действительно является категорией.

Гомотопный нулю морфизм $\varphi = d_W \gamma + \gamma d_V : V \rightarrow W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \rightarrow H(W)$, т. к. для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{C}om$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W , изоморфным V в категории $\mathcal{H}o$ — когомологии у W будут те же, что и у V , хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{C}om$ при этом может и не быть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2

Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\text{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

УПРАЖНЕНИЕ 5.10. Убедитесь, что в категории $\mathcal{H}o$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу и, в частности, ацикличны.

ПРИМЕР 5.4 (КОНУС ТОЖДЕСТВЕННОГО МОРФИЗМА)

Конус $\text{Con}(\text{Id}_V)$ тождественного морфизма $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ стягиваем посредством стягивающей гомотопии $\gamma \in \text{GrHom}^{-1}(\text{Con}(\text{Id}_V), \text{Con}(\text{Id}_V))$, которая в терминах прямых разложений $\text{Con}^i(\text{Id}_V) = V^{i+1} \oplus V^i$ и $\text{Con}^{i-1}(\text{Id}_V) = V^i \oplus V^{i-1}$ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. действует по правилу

$$\gamma_i : V^{i+1} \oplus V^i \rightarrow V^i \oplus V^{i-1}, \quad \begin{pmatrix} v_{i+1} \\ v_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, s -коммутирует $[d_{\text{Con}(\text{Id}_V)}, \gamma]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Id}_{\text{Con}(\text{Id}_V)}.$$

5.3. Комплексы Кошуля. Рассмотрим коммутативное кольцо K и для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f двучленный комплекс

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f} K \rightarrow 0, \quad (5-14)$$

сосредоточенный в степенях 0 и 1, дифференциалом в котором является гомоморфизм умножения на $f: x \mapsto fx$. Когомологии комплекса K_f суть

$$H^0(K_f) = \text{Ann } f = \{a \in K \mid af = 0\} \quad \text{и} \quad H^1(K_f) = K/(f).$$

ЛЕММА 5.1

Любой комплекс K -модулей C вписывается в категории Com в точную тройку

$$0 \rightarrow C[-1] \hookrightarrow K_f \otimes C \rightarrow C \rightarrow 0 \quad (5-15)$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\dots \rightarrow H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \rightarrow H^i(K_f \otimes C) \rightarrow H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \rightarrow \dots$$

со связывающим гомоморфизмом $\delta : H^i(C) \rightarrow H^{i+1}(C[-1]) = H^i(C)$, $[x] \mapsto [fx]$.

Доказательство. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k сумму

$$\left(K_f^0 \otimes C^k \right) \oplus \left(K_f^1 \otimes C^{k-1} \right) \simeq C^k \oplus C^{k-1},$$

и изоморфен свёртке двухстолбцового бикомплекса¹

$$\begin{array}{ccc}
 d_c \uparrow & & \uparrow -d_c \\
 C^{k+1} & \xrightarrow{f} & C^{k+1} \\
 d_c \uparrow & & \uparrow -d_c \\
 C^k & \xrightarrow{f} & C^k \\
 d_c \uparrow & & \uparrow -d_c \\
 C^{k-1} & \xrightarrow{f} & C^{k-1} \\
 d_c \uparrow & & \uparrow -d_c
 \end{array}$$

в котором правый столбец является подкомплексом, изоморфным $C[-1]$, а фактор по нему изоморфен левому столбцу, т. е. C . Последнее утверждение следует прямо из предл. 5.2 на стр. 65. \square

Следствие 5.1

Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C . \square

Пример 5.5 (комплекс Кошуля последовательности элементов)

Для конечной последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 f_2 \dots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\alpha=1}^m K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (5-14) называется *комплексом Кошуля* этой последовательности. Комплекс Кошуля сосредоточен в степенях от 0 до m , и его компонента степени k является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей ранга 1:

$$K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \dots \otimes K \simeq K,$$

которые биективно соответствуют грасмановым мономам $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}$, если сопоставить такой моном базисному произведению $1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ в котором k единиц степени 1 стоят в позициях i_1, i_2, \dots, i_k , а остальные $m - k$ единиц имеют степень нуль. Действие дифференциала комплекса на такое произведение $1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ при этом совпадает с действием на моном ξ_I левого умножения на грасманову линейную форму $\xi = f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2 + \dots + f_m \xi_m$. Таким образом, комплекс Кошуля последовательности f_1, f_2, \dots, f_m можно отождествить с комплексом

$$0 \rightarrow \Lambda^0(K^m) \xrightarrow{\xi} \Lambda^1(K^m) \xrightarrow{\xi} \dots \xrightarrow{\xi} \Lambda^{m-1}(K^m) \xrightarrow{\xi} \Lambda^m(K^m) \xrightarrow{\xi} 0, \quad (5-16)$$

дифференциал в котором задаётся левым умножением на $\xi = \sum f_i \xi_i \in \Lambda^1(K^m)$.

¹минусы справа обусловлены Кошулевым правилом знаков: в правом столбце

$$(\text{Id} \otimes d_c)(1 \otimes c) = -1 \otimes (d_c c),$$

поскольку в нём $|1| = 1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3

Последовательность $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если класс элемента f_k не делит нуль в факторе $K/(f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_m)$ при всех¹ $1 \leq k \leq m$.

ЛЕММА 5.2

Если элементы $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, комплекс Кошуля (5-16) имеет

$$H^k(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq k \leq m-1 \\ K/(f_1, f_2, \dots, f_m) & \text{при } k = m. \end{cases}$$

В частности, если хоть один из элементов f_i обратим в K , комплекс Кошуля полностью ацикличен.

Доказательство. Индукция по m . Случай $m = 1$ очевиден. Если теорема верна для последовательности f_2, f_3, \dots, f_m , то по лем. 5.1 k -тая группа когомологий комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m} = K_{f_1} \otimes K_{f_2 f_3 \dots f_m}$ при $0 \leq k \leq m-1$ зажата между двумя нулями:

$$0 = H^{k-1}(K_{f_2 f_3 \dots f_m}) \rightarrow H^k(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \rightarrow H^k(K_{f_2 f_3 \dots f_m}) = 0,$$

а m -тая группа является коядром умножения на f_1

$$\dots \rightarrow H^{m-1}(K_{f_2 f_3 \dots f_m}) \xrightarrow{f_1} H^{m-1}(K_{f_2 f_3 \dots f_m}) \rightarrow H^m(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \rightarrow 0$$

в фактор кольца $H^{m-1}(K_{f_2 f_3 \dots f_m}) = K/(f_2 f_3 \dots f_m)$. \square

5.4. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц E_0, E_1, E_2, \dots , клетки которых занумерованы целыми числами (p, q) , где p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q) , действующий из клеток диагонали $p+q = n$ в клетки следующей диагонали $p+q = n+1$ со сдвигом на r единиц вправо:

$$d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}, \quad d_r^2 = 0$$

- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r :

$$E_{r+1}^{p,q} = \ker(d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}) / d_r(E_r^{p-r, q-1+r})$$

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*² когомологического типа³. Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*, если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall (p, q) \exists N = N(p, q) : \forall r \geq N \quad d_r(E_r^{p,q}) = 0 \quad \text{и} \quad d_r(E_r^{p-r, q+r-1}) = 0. \quad (5-17)$$

¹при $k = m$ это означает, что f_m не делит нуль в K

²В просторечии *спектралку*.

³В спектралке гомологического типа таблицы нумеруют верхним индексом: E^0, E^1, E^2, \dots и заполняют модулями $E_{p,q}^r$ с дифференциалами $\partial_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r$ бистепени $(-r, r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p+q = n$ в клетки предыдущей диагонали $p+q = n-1$ со сдвигом на r единиц в лево.

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p + q = \text{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r \geq N(p, q)$ из условия (5-17) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям

$$E_\infty^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$$

и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$. Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов. Простейшим примером этой ситуации является

Предложение 5.3 (СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФИЛЬТРОВАННОГО КОМПЛЕКСА)
Пусть комплекс C обладает такой убывающей системой подкомплексов¹ $F^p C \subseteq C$,

$$C \supseteq \dots \supseteq F^{p-1} C \supseteq F^p C \supseteq F^{p+1} C \supseteq \dots \supseteq 0, \quad (5-18)$$

что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ подмодули $F^p C^n$ совпадают с C^n при всех $p \ll 0$ и зануляются при всех $p \gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p C), \quad \text{где} \quad \text{Gr}^p C \stackrel{\text{def}}{=} F^p C / F^{p+1} C,$$

сходящаяся к присоединённым факторам $\text{Gr}^p H^{p+q}(C) \stackrel{\text{def}}{=} F^p H^{p+q}(C) / F^{p+1} H^{p+q}(C)$ убывающей фильтрации $F^\bullet H(C)$ на модуле когомологий $H(C)$, относящей в подмодуль $F^p H(C) \subseteq H(C)$ все коциклы, лежащие в подкомплексе $F^p C$, по модулю всех попавших в этот подкомплекс кограниц.

Доказательство. Для каждого $r = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим в модуле C^{p+q} модули

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} \ker(F^p C^{p+q} \xrightarrow{d} C^{p+q+1} / F^{p+r} C^{p+q+1}) = \{c \in F^p C^{p+q} \mid dc \in F^{p+r} C^{p+q+1}\} \\ B_r^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} d(F^{p-r+1} C^{p+q-1}) + F^{p+1} C^{p+q} \\ E_r^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} Z_r^{p,q} / (B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}) \simeq (Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}) / B_r^{p,q}. \end{aligned}$$

При $r = 0$ они имеют вид

$$\begin{aligned} Z_0^{p,q} &= F^p C^{p+q} \\ B_0^{p,q} &= F^{p+1} C^{p+q} \\ E_0^{p,q} &= F^p C^{p+q} / F^{p+1} C^{p+q} = \text{Gr}^p C^{p+q}, \end{aligned}$$

и дифференциал $d : C^{p+q} \rightarrow C^{p+q+1}$ комплекса C корректно факторизуется до дифференциала $d_0 : E_0^{p,q} = \text{Gr}^p C^{p+q} \rightarrow \text{Gr}^p C^{p+q+1} = E_0^{p,q+1}$. Таким образом, в p -том столбце

¹Это означает, что $d_C(F^p C) \subseteq F^p C$ при всех $p \in \mathbb{Z}$.

таблицы E_0 стоит p -тый присоединённый фактор комплекс $\text{Gr}^p C = F^p C / F^{p+1} C$ фильтрованного комплекса C . Прообразы коциклов степени $p + q$ из этого комплекса образуют в C^{p+q} подмодуль $\{c \in F^p C^{p+q} \mid dc \in F^{p+1} C^{p+q}\} = Z_1^{p,q}$, а когомологии

$$H^{p+q}(\text{Gr}^p C) = \frac{Z_1^{p,q}}{Z_1 \cap (F^p C^{p+q-1}) + F^{p+1} C^{p+q}} = \frac{Z_1^{p,q}}{Z_1^{p,q} \cap B_1^{p,q}} = E_1^{p,q}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.11. При всех $r \in \mathbb{N}$ проверьте, что

$$d(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r, q-r+1} \quad \text{и} \quad d(B_r^{p,q}) \subset B_r^{p+r, q-r+1},$$

так что дифференциал $d : C \rightarrow C$ корректно факторизуется до дифференциала $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r}$, и убедитесь, что модуль когомологий последнего

$$\frac{\ker(d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+1-r})}{\text{im}(d_r : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q})} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}} = E_{r+1}^{p,q}.$$

Из условия предположения вытекает, что на каждой диагонали возникающей таким образом спектральной последовательности имеется лишь конечное число ненулевых модулей, и она сходится к модулям

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} \cap Z_\infty^{p,q}} \simeq \frac{F^p C^{p+q} \cap \ker d}{F^{p+1} C^{p+q} \cap \text{im} d} = \text{Gr}^p H^{p+q}(C),$$

что и утверждалось. \square

ПРИМЕР 5.6 (двучленная фильтрация)

Точная тройка комплексов $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0 V \supset U = F^1 V \supset 0 = F^2 V$ с присоединёнными факторами $\text{Gr}^0 V = V/U = W$ и $\text{Gr}^1 V = U/0 = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из [предл. 5.3](#) сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{array}{ccc} H^{p+1}(W) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+2}(U) \\ & \searrow \text{---} & \\ H^p(W) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(U) \\ & \searrow \text{---} & \\ H^{p-1}(W) & \xrightarrow{\delta} & H^p(U) \\ & \searrow \text{---} & \\ H^{p-2}(W) & \xrightarrow{\delta} & H^{p-1}(U) \end{array}$$

Таблица её когомологий $E_2 = H(E_1)$ совпадает с предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$:

$$0 \rightarrow \text{coker}(H^{n-1}(W) \rightarrow H^n(U)) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker(H^n(W) \rightarrow H^{n+1}(U)) \rightarrow 0,$$

что согласуется с длинной последовательностью когомологий (5-9)

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \rightarrow H^n(V) \rightarrow H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \rightarrow \dots,$$

исходной точной тройки комплексов $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$. Таким образом, спектральная последовательность двучленной фильтрации содержит ровно столько же информации, что и длинная последовательность когомологий.

5.4.1. Спектральные последовательности бикомплекса. На тотальном комплексе¹ $C^n = \text{Tot}^n(V) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}$ бикомплекса $V = V^{p,q}$ имеются две симметричных фильтрации, получающиеся одна из другой отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая имеет

$$F^p \text{Tot}^n(V) = \bigoplus_{v \geq p} V^{v, n-v}$$

и индуцирует на $H^n(\text{Tot}^n(V))$ убывающую фильтрацию, присоединённые градуированные факторы которой можно вычислять при помощи спектральной последовательности из предл. 5.3. В столбцах её начальной таблицы E_0 стоят фактор комплексы

$$E_0^{p,*} = G^p \text{Tot}(V) \simeq V^{p,*},$$

и дифференциал тотального комплекса $d = d_h + d_v$, имеющий горизонтальную и вертикальную компоненты $d_h : V^{p,q} \rightarrow V^{p+1,q}$ и $d_v : V^{p,q} \rightarrow V^{p,q+1}$, действует на E_0 дифференциалом $d_0 = d_v$. Таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p(\text{Tot}(V))) = H_{\text{ver}}^q(V^{p,*})$$

комплексов-столбцов бикомплекса V , а дифференциал $d = d_h + d_v$ действует на них дифференциалом $d_1 = d_{h*}$, который индуцируется на когомологиях комплексов-столбцов бикомплекса V горизонтальным дифференциалом d_h этого бикомплекса.

УПРАЖНЕНИЕ 5.12. Убедитесь, что всякий s -антикоммутирующий с дифференциалами² d_U, d_W комплексов U, W морфизм $\varphi \in \text{Hom}_{\text{DG}}^0(U, W)$, также, как и морфизм комплексов, корректно задаёт морфизм когомологий³ $\varphi_* : H(U) \rightarrow H(W)$.

Тем самым, таблица E_2 состоит из модулей $E_2^{p,q} = H_{\text{hor}}^p(H_{\text{ver}}^q(V))$.

Вторая убывающая фильтрация на $\text{Tot}^n(V)$ получается из первой перестановкой букв p, q и имеет

$$F^q \text{Tot}^n(V) = \bigoplus_{v \geq q} V^{n-v, v}.$$

Дифференциалы $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p-r+1, q+r}$ ассоциированной с нею спектральной последовательности с ростом r наклоняются влево и вверх, симметрично относительно диагонали $p = q$ к тому, как вели себя дифференциалы первой спектралки, а $E_2^{p,q} = H_{\text{ver}}^p(H_{\text{hor}}^q(V))$. Подытожим сказанное как

¹См. н° 5.1.3 на стр. 64.

²Т. е. удовлетворяющий равенству $d_W \varphi + \varphi d_U = 0$.

³Ср. с предл. 5.1 на стр. 65.

Предложение 5.4 (Спектральные последовательности бикомплекса)

С каждым бикомплексом V связаны две спектралки с E_2 -членами

$${}^I E_2^{p,q} = H_{\text{hor}}^p (H_{\text{ver}}^q(V)) \quad \text{и} \quad {}^II E_2^{p,q} = H_{\text{ver}}^q (H_{\text{hor}}^p(V)) . \quad (5-19)$$

Если на каждой диагонали $p + q = \text{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе они сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых фильтраций на $H^{p+q}(\text{Tot}(V))$. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 5.7. Равенства $\psi_*\varphi_* = 0$, $\delta\psi_* = 0$ и $\varphi_*\delta = 0$ следуют прямо из определений морфизмов φ_* , ψ_* и δ . Точность композиции $\psi_*\varphi_*$: если класс коцикла η лежит в $\ker \psi_*$, то $\psi\eta = d_W\xi$, и для такого $\eta' \in V$, что $\psi\eta' = \xi$, когомологичная коциклу η разность $\eta - d_V\eta' \in \ker \psi$, а значит, найдётся такой $\zeta \in U$, что $\varphi\zeta = \eta - d_V\eta' \equiv \eta \pmod{d}_V(V)$. Точность композиции $\delta\psi_*$: если класс коцикла $\xi = \psi(\eta) \in \ker \delta$, то $\delta\xi = d_V\varphi\zeta$ для некоторого $\zeta \in U$, откуда $\eta - \varphi\zeta \in \ker d_V$ является коциклом в V , и $\xi = \psi(\eta - \varphi\zeta)$. Точность композиции $\varphi_*\delta$: если коцикл $\zeta \in \ker d_U$ лежит в $\ker \varphi_*$, то $\varphi\zeta = d_V\eta$ для $\eta \in V$, и $\zeta = \delta(\psi\eta)$, причём $\psi\eta \in W$ является коциклом, т. к. $d_W(\psi\eta) = \psi d_V\eta = \psi\varphi\zeta = 0$.

Упр. 5.9. Пусть $\psi : U \rightarrow V$ и $d_V\psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W\gamma + \gamma d_V$ имеем

$$\varphi\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma d_V\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma\psi d_U.$$

Упр. 5.10. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \rightarrow A$ и $\pi : A \rightarrow 0$ суть взаимно обратные изоморфизмы в $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi\iota = \text{Id}_0$, а $\iota\pi = 0 \sim \text{Id}_A$.