

Категории и функторы.

Обозначения. Через $Set, Top, Ab, Grp, Cmr, Mod_K, Vec_{\mathbb{k}} = Mod_{\mathbb{k}}, Ass_{\mathbb{k}}, A-Mod, Mod-A$ обозначаются категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец¹, модулей над коммутативным кольцом K , векторных пространств и ассоциативных алгебр над полем \mathbb{k} , левых и правых модулей над (некоммутативной) ассоциативной \mathbb{k} -алгеброй A . Категории функторов $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и предпучков $\mathcal{C}^{opp} \rightarrow \mathcal{D}$ обозначаются через $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ и $pSh(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

ПГА1♦1. Обозначим через Δ_{big} категорию всех конечных упорядоченных множеств и необывающих отображений между ними, а через $\Delta \subset \Delta_{big}$ её полную подкатеорию, состоящую из множеств $[n] = \{0, 1, \dots, n\}, n \geq 0$. Покажите, что а) категории Δ и Δ_{big} канонически эквивалентны б) алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$ порождается тождественными отображениями $e_n = Id_{[n]}$, вложениями $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$, где $0 \leq i \leq n$ и образ не содержит i , и наложениями $s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1]$, где $0 \leq i \leq n-1$ и $(i+1) \mapsto i$. в*) Найдите образующие идеала соотношений между этими порождающими стрелками.

ПГА1♦2. Для каждого $X \in Ob \mathcal{C}$ функтор $h^X : Y \mapsto Hom(X, Y)$ и предпучок $h_X : Y \mapsto Hom(Y, X)$ переводят стрелку $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ соответственно в левое и правое умножения на эту стрелку: $\varphi_* : Hom(X, Y_1) \rightarrow Hom(X, Y_2), \psi \mapsto \varphi \circ \psi$ и $Hom(Y_2, X) \rightarrow Hom(Y_1, X), \psi \mapsto \psi \circ \varphi$. Проверьте, что сопоставления $X \mapsto h^X$ и $X \mapsto h_X$ задают вполне строгие предпучок $\mathcal{C}^{opp} \rightarrow Fun(\mathcal{C}, Set)$ и функтор $\mathcal{C} \rightarrow pSh(\mathcal{C}, Set)$.

ПГА1♦3. Покажите, что при применении h^X к точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в Ab получится точная последовательность $0 \rightarrow Hom(X, A) \rightarrow Hom(X, B) \rightarrow Hom(X, C)$, правая стрелка в которой не обязательно сюръективна. Установите двойственный факт про h_X .

ПГА1♦4. Опишите произведения и копроизведения в а) Set б) Top в) Mod_K г) Grp д) Cmr .

ПГА1♦5. В категории Ab для простого $p \in \mathbb{N}$ положим $A_n = \mathbb{Z}/(p^n)$, и при $n < m$ обозначим через $\psi_{nm} : A_m \twoheadrightarrow A_n$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : A_n \hookrightarrow A_m$ вложение $[1] \mapsto [p^{m-n}]$. Покажите, что а) $\lim A_n$ вдоль стрелок ψ_{mn} изоморфен группе целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_{(p)}$ б) $\text{colim } A_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен подгруппе классов дробей вида q/p^l в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

ПГА1♦6. В категории Ab положим $B_n = \mathbb{Z}/(n)$, и при $n|m$ обозначим через $\psi_{nm} : B_m \twoheadrightarrow B_n$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : B_n \hookrightarrow B_m$ вложение $[1] \mapsto [m/n]$. Покажите, что а) $\lim B_n$ вдоль стрелок ψ_{nm} изоморфен неархимедову пополнению $\prod_p \mathbb{Z}_{(p)}$ группы \mathbb{Z} б) $\text{colim } B_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

ПГА1♦7. Докажите, что функтор $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ тогда и только тогда имеет левый сопряжённый F , когда для каждого $X \in Ob \mathcal{C}$ функтор $h_G^X : Y \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ копредставим, и в этом случае $F(X)$ копредставляет h_G^X . Найдите двойственные необходимые и достаточные условия существования правого сопряжённого функтора G к данному функтору $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

ПГА1♦8. Покажите, что все левые сопряжённые функторы перестановочны с копределами, а правые — с пределами².

ПГА1♦9. Для любого расширения $S \subset R$ ассоциативных алгебр с единицей постройте левый и правый сопряжённые функторы к функтору ограничения $\text{res}_S^R : R-Mod \rightarrow S-Mod$.

ПГА1♦10. Сопоставим топологическому пространству X предпучок $S(X) : \Delta^{opp} \rightarrow Set$, переводящий $[n] \in Ob \Delta$ в множество непрерывных отображений $S_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} Hom_{Top}(\Delta^n, X)$ из стандартного правильного симплекса³ $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в X , а необывающей стрелке $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ правое умножение $f \mapsto f \circ |\varphi|$ на аффинное отображение $|\varphi| : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$, действующее на вершины как φ . Покажите, что функтор $S : Top \rightarrow pSh(\Delta)$ сопряжён справа к функтору геометрической реализации $pSh(\Delta) \rightarrow Top$.

¹С единицами и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу.

²Функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ перестановочен с (ко) пределами, если для любого $L \in Ob \mathcal{C}$ и любой диаграммы $\Phi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в \mathcal{C} , вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ \Phi$ в \mathcal{D}

³Т. е. выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
5а			
б			
6а			
б			
7			
8			
9			
10			