

Сопряжённые функторы, точные функторы и копределы.

ПГА2♦1. Предпучки $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*), если имеется функториальная по $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$ биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(D), C) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \quad (\text{соотв. } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, F(C))).$$

Сформулируйте и докажите для таких функторов аналоги двух утверждений из зад. ПГА1♦8.

ПГА2♦2. Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, если и только если существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$, что композиции¹ $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ равны² тождественным эндоморфизмам функторов F и G .

ПГА2♦3. Покажите, что для козамкнутости категории \mathcal{C} достаточно существования в \mathcal{C} начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

ПГА2♦4. Пусть подмножество S в кольце³ R с единицей таково, что $1 \in S$, $s, t \in S \Rightarrow st \in S$ и выполнены условия *Оре*: $(O_1) \forall \varrho \in R \forall s \in S \exists \lambda \in R \exists t \in S: \lambda s = t\varrho$ $(O_2) \forall \varphi, \psi \in R$ из $\exists s \in S: \varphi s = \psi s$ следует, что $\exists t \in S: t\varphi = t\psi$. Превратим S в категорию, полагая $\text{Hom}_S(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$, и определим функтор $S \rightarrow \text{Mod-}R$, отправляя объект $s \in S$ в свободный правый R -модуль ранга один, базисный вектор в котором обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а стрелку $\lambda \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$ – в гомоморфизм $\left[\frac{1}{s_1}\right] \mapsto \left[\frac{1}{s_2}\right] \cdot \lambda$. Покажите, что копредел этого функтора это *модуль левых дробей* $S^{-1}R$ образованный классами пар $s^{-1}\varrho$ по отношению $s_1^{-1}\varrho_1 \sim s_2^{-1}\varrho_2$, означающему существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2$. Проверьте, что это отношение эквивалентности и задайте на $S^{-1}R$ структуру кольца с единицей.

ПГА2♦5 (точные функторы). Функтор $F : \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$ (соотв. $\mathcal{A}b^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}b$) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра. Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что: а) для фиксированной группы $N \in \text{Ob } \mathcal{A}b$ функтор $X \mapsto X \otimes_{\mathbb{Z}} N$ точен справа, и предъявите группу N , для которой он не точен слева б) для фиксированной фильтрующейся категории \mathcal{N} функтор $\text{colim}_{\mathcal{N}} : \text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A}b) \rightarrow \mathcal{A}b$ точен⁴.

ПГА2♦6. Покажите, что точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ пучков абелевых групп на топологическом пространстве X точна, если и только если для каждой точки $x \in X$ последовательность слоёв $0 \rightarrow F_x \rightarrow G_x \rightarrow H_x \rightarrow 0$ точна в категории абелевых групп, и приведите пример, показывающий, что для предпучков это не так.

ПГА2♦7. Покажите что тавтологическое вложение категории пучков абелевых групп в категорию предпучков абелевых групп на топологическом пространстве является точным слева функтором, но, вообще говоря, не точно справа.

ПГА2♦8. Покажите, что функтор $\Gamma : \mathcal{T}op(X) \rightarrow pSh(X)$ сопоставляющий непрерывному отображению $E \rightarrow X$ пучок его локальных сечений, сопряжён справа функтору $\mathcal{E} : pSh(X) \rightarrow \mathcal{T}op(X)$, сопоставляющему предпучку множеств F на X его этальное пространство $\mathcal{E}_F = \coprod_{x \in X} F_x$ со слабой топологией, в которой все сечения $s : U \rightarrow \mathcal{E}_F$, $x \mapsto$ (класс s в F_x), непрерывны для всех $s \in F(U)$ и всех U .

¹Где $(F \circ s)_X \stackrel{\text{def}}{=} F(s_X)$, $(t \circ F)_X \stackrel{\text{def}}{=} t_{F(X)}$ и т. д.

²Именно равны, а не просто эквивалентны.

³Ассоциативном, но не обязательно коммутативном.

⁴Ядро и коядро естественного преобразования диаграмм $f : X \rightarrow Y$ образованы, соответственно, ядрами и коядрами стрелок $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$, $\nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$. Проверьте, что стрелки $X(\mu \rightarrow \nu)$ и $Y(\mu \rightarrow \nu)$ корректно задают гомоморфизмы этих групп, и эти гомоморфизмы образуют диаграммы $\ker f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$ и $\text{coker } f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8			