Напоминалка про комплексы и (ко)гомологии

ПГА3◇1. Рассмотрим комплексы (левых) модулей над (некоммутативным) кольцом с единицей. Обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,B) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_i \mathrm{Hom}^i(A,B)$, где $\mathrm{Hom}^i(A,B) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_\nu \mathrm{Hom}\left(A^\nu, B^{\nu+i}\right)$, комплекс с дифференциалом $d\,:\,\psi \mapsto d_B\psi - (-1)^{|\psi|}\psi d_A$, где $\psi \in \mathrm{Hom}^{|\psi|}(A,B)$ однороден степени $|\psi|$, через $\mathrm{Hom}(A,B) \overset{\text{def}}{=} \ker d \cap \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(A,B)$ ядро этого дифференциала в компоненте степени нуль, а через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(A,B) \overset{\text{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,B)\right) = \mathrm{Hom}(A,B)/\operatorname{im} d$ нулевые когомологии дифференциала d. Покажите, что **а)** комплексы с группами Hom в качестве морфизмов образуют абелеву категорию[1] **б)** комплексы с группами $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$ в качестве морфизмов образуют DG-категорию[2] **в)** комплексы с группами $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}$ в качестве морфизмов образуют категорию[3] **г)** любой морфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)$ корректно задаёт гомоморфизм градуированных модулей $\varphi_*\,:\,\bigoplus_i H^i(A) \to \bigoplus_i H^i(B)$ **д)** если $\varphi = \psi$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(A,B)$, то $\varphi_* = \psi_*$ **е)** функторы когомологий $A \mapsto \bigoplus_i H^i(A)$ перестановочны с копределами фильтрующихся диаграмм в $\mathcal{C}om$.

ПГА3◇2. В категории $\mathcal{C}om$ постройте на каждом комплексе K функториальную по K убывающую фильтрацию подкомплексами $\cdots \supset F^i \supset F^{i+1} \supset \cdots$, каждый присоединённый фактор которой $G^i = F^i/F^{i+1}$ имеет единственный ненулевой модуль когомологий, причём последний располагается в степени i и равен **а)** K^i **б)** $H^i(K)$.

ПГА3◇3. Функция $\alpha\,:\,\mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to A$ из объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ в абелеву группу A называется *аддитивной*, если для любой точной тройки $0 \to K \to L \to M \to 0$ в категории $\mathcal{A}$ в группе A выполняется соотношение $\alpha(L) = \alpha(K) + \alpha(M)$. Докажите для любой аддитивной функции α и любого ограниченного[4] комплекса K *формулу Эйлера* $\sum(-1)^i\alpha\left(K^i\right) = \sum(-1)^i\alpha\left(H^i(K)\right)$.

ПГА3◇4. Функториально сопоставьте точной тройке $0 \to K \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M \to 0$ в категории $\mathcal{C}om$ точную последовательность $\cdots \to H^i(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^i(L) \xrightarrow{\psi_*} H^i(M) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(L) \to \cdots$.

ПГА3◇5. Для конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}\Bbbk = 0$ и ненулевого ковектора $\xi \in V^*$ вычислите когомологии комплексов ΛV и ΛV^* с дифференциалами[5]

$$\partial_\xi\,:\,\Lambda^m V \to \Lambda^{m-1}V\,,\quad \eta \mapsto \partial_\xi\eta \quad \text{и} \quad \xi\,:\,\Lambda^m V^* \to \Lambda^{m+1}V^*\,,\quad \omega \mapsto \xi\wedge\omega\,.$$

ПГА3◇6. Выберем в пространстве V базис, обозначим через x_i и ξ_i образы базисных векторов в алгебрах SV и ΛV и рассмотрим следующие эндоморфизмы векторного пространства $SV\otimes\Lambda V$:

$$\partial = \sum x_i \otimes \frac{\partial}{\partial\xi_i}\,:\,S^kV\otimes\Lambda^mV \to S^{k+1}V\otimes\Lambda^{m-1}V\,,\quad f\otimes\omega \mapsto \sum_{i=1}^n x_i\cdot f\otimes\frac{\partial\omega}{\partial\xi_i}\,,$$

$$d = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\otimes\xi_i\,:\,S^kV\otimes\Lambda^mV \to S^{k-1}V\otimes\Lambda^{m+1}V\,,\quad f\otimes\omega \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\otimes\xi_i\wedge\omega\,.$$

а) Покажите, что они не зависят от выбора базиса и $\partial^2 = d^2 = 0$.
б) Вычислите коммутатор $\partial d + d\partial$ и когомологии обоих дифференциалов.

---

[1] Т. е. точную в смысле листка 2½ категорию, в которой функтор Hom принимает значения в категории $\mathcal{A}b$ и композиции морфизмов дистрибутивны по отношению к их сложению, а также существуют прямые произведения любых пар объектов, одновременно являющиеся и копроизведениями тех же самых пар объектов. Категория из зад. 1а называется *категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om$.

[2] Т. е. дифференциал на $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$ связан с композицией *формулой Лейбница*: $d(\varphi\psi) = (d\varphi)\psi + (-1)^{|\varphi|}\varphi(d\psi)$. Эта категория называется DG-*категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}$.

[3] Она называется *гомотопической категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{Ho}$.

[4] Комплекс K называется *ограниченным сверху* (соотв. *снизу*), если $K^i = 0$ при всех $i \gg 0$ (соотв. при всех $i \ll 0$), и просто *ограниченным*, если он ограничен и сверху и снизу.

[5] Оператор ∂_ξ переводит $\omega \in \Lambda^mV$ в умноженный на $m = \deg\omega$ образ при проекции $V^{\otimes(m-1)} \twoheadrightarrow \Lambda^{m-1}V$ тензора, полученного свёрткой ковектора ξ по первому сомножителю с единственным кососимметричным тензором $\widetilde{\omega} \in V^{\otimes m}$ проектирующимся в ω при проекции $V^{\otimes m} \twoheadrightarrow \Lambda^mV$. Если e_i и ξ_i — двойственные базисы в V^* и V, то $\partial_{\xi_i} = \frac{\partial}{\partial e_i}$.

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (06.02.2017)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
д			
е			
2а			
б			
3			
4			
5			
6а			
б			