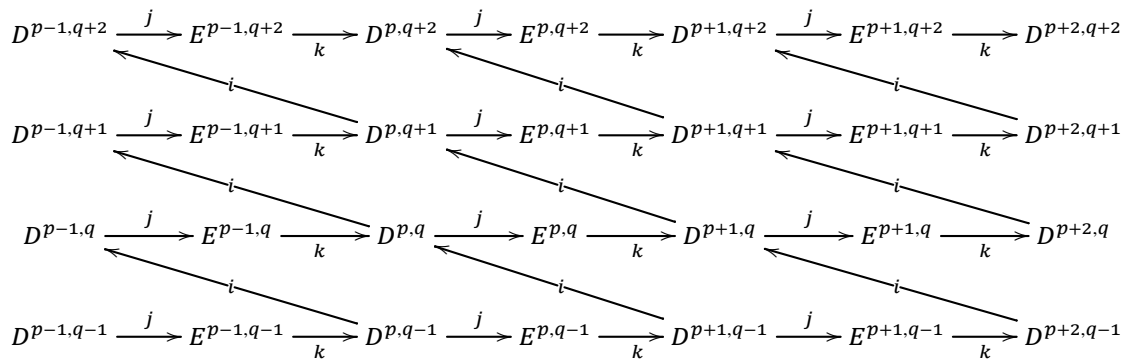


Спектральные последовательности.

ПГА5♦1. Точная диаграмма модулей
$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{i_1} & D_1 \\ & \searrow k_1 & \swarrow j_1 \\ & & E_1 \end{array}$$
 обозначается $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ и называется

точной парой¹. Положим $d_1 = j_1 k_1, E_2 = \ker d_1 / \text{im } d_1, D_2 = \text{im } i_1, i_2 = i_1|_{\text{im } i_1}, j_2 : i_1(x) \mapsto j_1(x)$ и $k_2 : x \pmod{\text{im } d_1} \mapsto k_1(x)$. Покажите, что а) $d_1^2 = 0, j_2$ и k_2 определены корректно, а $(D_2, E_2, i_2, j_2, k_2)$ является точной парой (она называется производной от $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$) б) в $(r-1)$ -той производной паре $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ модули $D_r = \text{im } i_1^{r-1}$ и $E_r = k_1^{-1}(\text{im } i_1^{r-1})/j_1(\ker i_1^r)$ включаются в точную тройку $0 \rightarrow \text{im } i_1^{r-1} / \text{im } i_1^r \rightarrow E_r \rightarrow \ker i_1^r / \ker i_1^{r-1} \rightarrow 0$

ПГА5♦2. Пусть модули $D_1 = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} D_1^{p,q}$ и $E_1 = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_1^{p,q}$ биградуированы, а морфизмы однородны бистепеней $\deg i_1 = (-1, 1), \deg j_1 = (0, 0)$ и $\deg k_1 = (1, 0)$. Разместим модули $E_r^{p,q}$ из $(r-1)$ -той производной $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ от начальной точной пары $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ в прямоугольную таблицу с горизонтальной координатой p и вертикальной q . Пусть $E_1^{p,q} = 0$ при $q \ll 0$ равномерно по p и при $p \ll 0$ равномерно по q . Покажите, что для каждой клетки (p, q) найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $\forall r > N E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$, и опишите $E_\infty^{p,q}$ как подфактор в D_1 в терминах ядер и/или образов итерированного гомоморфизма $i_1 : D_1 \rightarrow D_1$ (см. диаграмму ниже).



Предел. Пусть $\forall p, q$ существует такое $N = N(p, q)$, что входящий в клетку (p, q) и выходящий из клетки (p, q) дифференциалы во всех таблицах $E_r^{p,q}$ с $r > N$ зануляются, так что корректно определены $E_\infty^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} E_{N+1}^{p,q} = E_{N+2}^{p,q} = \dots$. Если существуют модули E_∞^n с такими убывающими фильтрациями $F^p E_\infty^n$, что $E_\infty^n = \bigcup_p F^p E_\infty^n$,

$\bigcap_p F^p E_\infty^n = 0$ и $F^p E_\infty^n / F^{p+1} E_\infty^n = E_\infty^{n-p}$, то говорят, что $E_r^{p,q}$ сходятся к E_∞^n и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$.

ПГА5♦3. Пусть каждый член K^m комплекса $\dots \rightarrow K^m \rightarrow K^{m+1} \rightarrow \dots$ снабжён конечной убывающей фильтрацией $K^m = F^0 K^m \supset F^1 K^m \supset F^2 K^m \supset \dots \supset 0$ с $d(F^p K^m) \subset F^p K^{m+1}$ при всех p, m . Покажите, что: а) при каждом p корректно определён фактор комплекс $G^p K$ с m -тым членом $F^p K^m / F^{p+1} K^m$ и дифференциалом, индуцированным дифференциалом d исходного комплекса K б) модули $D_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p K)$ и $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G^p K)$ организуются в биградуированную точную пару с r -той производной $E_{r+1}^{p,q} \simeq Z_r^{p,q} / (B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}) \simeq (Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}) / B_r^{p,q}$, где $Z_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in F^p K^{p+q} \mid dc \in d(F^{p+r} K^{p+q})\}$ и $B_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} d(F^{p-r} K^{p+q-1}) + F^{p+1} K^{p+q}$ в) $E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(K)$.

ПГА5♦4. Рассмотрите на тотальном комплексе $\text{Tot}(K)$ бикомплекса $K = \bigoplus K^{p,q}$ две фильтрации ${}^I F$ и ${}^II F$, имеющие ${}^I F^p \text{Tot}^m(K) = \bigoplus_{v \geq p} K^{p,q}$ и ${}^II F^q \text{Tot}^m(K) = \bigoplus_{v \geq q} K^{p,q}$ и получите пару спектралок: ${}^I E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(K))$ с ${}^I E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$ и ${}^II E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(K))$ с ${}^II E_2^{p,q} = H_{d_2}^q(H_{d_1}^p(K))$.

¹По-английски exact couple.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3а			
б			
в			
4			