

**Сечения с компактными носителями.**

**Соглашения и обозначения.** Все пучки в этом листке суть пучки абелевых групп, а все топологические пространства локально компактны. Непрерывное отображение называется *собственным*, если прообраз любого компакта компактен. Подмножество  $W \subset X$  называется *локально замкнутым*, если у каждой точки  $w \in W$  есть такая открытая окрестность  $U \ni w$  в  $X$ , что  $U \cap W$  замкнуто в  $U$  в индуцированной с  $X$  топологии на  $U$ . Для пучка  $F$  на  $X$  элементы абелевой группы  $H_c^0(X, F) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in F(X) \mid \text{supp}(s) \text{ компактен}\}$  называются *глобальными сечениями с компактными носителями*.

**ПГА6◊1.** Для непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  и пучка  $F$  на  $X$  зададим на  $Y$  подпредпучок  $f_!F \subset f_*F$  правилом  $f_!F(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in F(f^{-1}U) \mid \text{отображение } f|_{\text{supp}(s)} : \text{supp}(s) \rightarrow U \text{ собственное}\}$ . Покажите, что: а)  $f_!F$  является пучком б) если  $f$  – вложение замкнутого подмножества, то  $f_! = f_*$  в) функтор  $f_! : \mathcal{S}h(X) \rightarrow \mathcal{S}h(Y)$ ,  $F \mapsto f_!F$ , точен слева г)  $\forall y \in Y$  слой  $f_!F_y \simeq H_c^0(f^{-1}(y), F|_{f^{-1}(y)})$ .

**ПГА6◊2.** Пусть  $f : W \hookrightarrow X$  – вложение локально замкнутого подмножества и  $F$  – пучок на  $W$ . Покажите, что: а) слой  $f_!F_x = F_x$  при  $x \in W$  и нулевой при  $x \notin W$  б) функтор  $f_!$  точен в)  $f^*f_! = \text{Id}_{\mathcal{S}h(W)}$  г) функторы  $f_!$  и  $f^*$  являются квазиобратными друг другу эквивалентностями между категорией  $\mathcal{S}h(W)$  и полной подкатегорией в  $\mathcal{S}h(X)$ , состоящей из пучков с нулевыми слоями во всех точках  $X \setminus W$ .

**ПГА6◊3.** В условиях **зад. ПГА6◊2** для пучка  $G$  на  $X$  положим  $G^W(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in F(U) \mid \text{supp}(s) \subset W\}$  и  $h^!G \stackrel{\text{def}}{=} h^*G^W$ . Покажите, что а)  $G^W$  – пучок на  $X$  с нулевыми слоями во всех точках  $X \setminus W$  б) функтор  $f^!$  сопряжён *справа* функтору  $f_!$  и точен слева в) если  $W$  открыто в  $X$ , то  $h^! = h^*$  г) если  $W$  замкнуто в  $X$ , то  $h^!h_* = \text{Id}_{\mathcal{S}h(W)}$ .

**ПГА6◊4.** Пусть  $i : Z \hookrightarrow X$  и  $j : U \hookrightarrow X$  – вложения дополнительных друг к другу замкнутого и открытого множеств, так что  $U = X \setminus Z$ . Постройте для любого пучка  $F$  на  $X$  функториальную точную тройку пучков  $0 \rightarrow j_!j^*F \rightarrow F \rightarrow i_*i^*F \rightarrow 0$  на  $X$ .

**ПГА6◊5.** Для непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  и локально замкнутого вложения  $h : W \hookrightarrow Y$  обозначим через  $g$  локально замкнутое вложение  $g : f^{-1}(W) \hookrightarrow X$ . Постройте изоморфизм функторов  $f_*h^! \simeq g_!f^*$ .

**ПГА6◊6.** Пусть в точной тройке  $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$  пучков на  $X$  пучок  $F$  мягок, а отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно. Покажите, что а) пучок  $f_!F$  мягок, а последовательности б) пучков  $0 \rightarrow f_!F \rightarrow f_!G \rightarrow f_!H \rightarrow 0$  в) абелевых групп  $0 \rightarrow H_c^0(X, F) \rightarrow H_c^0(X, G) \rightarrow H_c^0(X, H) \rightarrow 0$  обе точны.

**ПГА6◊7.** Определим высший прямой образ с компактным носителем  $R^q f_!F$  пучка  $F$  на  $X$  при непрерывном отображении  $f : X \rightarrow Y$  как  $q$ -тый пучок когомологий комплекса  $0 \rightarrow f_!C_F^0 \rightarrow \dots \rightarrow f_!C_F^1 \rightarrow f_!C_F^2 \rightarrow \dots$  пучков на  $Y$ , полученного применением функтора  $f_!$  к вялой резольвенте Годемана  $C_F^\bullet$  пучка  $F$  на  $X$  (в частности,  $H_c^q(X, F) \stackrel{\text{def}}{=} R^q c_!F$ , где  $c : X \rightarrow \text{pt}$  постоянное отображение в точку). Покажите, что а) точная тройка пучков на  $X$  порождает длинную точную последовательность высших прямых образов на  $Y$  б) в определении  $R^q f_!F$  вместо вялой резольвенты Годемана можно взять любой комплекс пучков  $G^\bullet$  на  $X$ , имеющий единственный ненулевой пучок когомологий  $H^0(G^\bullet) \simeq F$  и такой что  $R^q f_!G^p = 0$  при  $q > 0$  для всех  $p$  в) имеется спектральная последовательность Лере с  $E_2^{p,q} = H_c^p(Y, R^q f_!F)$ , сходящаяся к  $H_c^{p+q}(X, F)$ .

**ПГА6◊8.** Обозначим через  $\dim_c X$  наименьшее такое  $n$ , что  $H_c^n(X, F) = 0$  для любого пучка  $F$  на  $X$ . Покажите, что а) если в точной последовательности пучков  $0 \rightarrow F \rightarrow S^0 \rightarrow S^1 \rightarrow \dots \rightarrow S^{n-1} \rightarrow S^n \rightarrow 0$  все пучки  $S^k$  с  $0 \leq k \leq n - 1$  мягкие, то и пучок  $S^n$  тоже мягкий б)  $\dim_c \mathbb{R}^n = n$  в)  $\dim_c W \leq \dim_c X$  для любого локально замкнутого  $W \subset X$  г) если у каждой точки  $x \in X$  есть открытая окрестность  $U$  с  $\dim_c U \leq n$ , то и  $\dim_c X \leq n$  д)  $R^q f_!F = 0$  при  $q > \dim_c X$  для любого непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  и любого пучка  $F$  на  $X$ .

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
в			
7а			
б			
в			
8а			
б			
в			
г			
д			