

Когерентные пучки

Терминология. Пусть поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Алгебраическое многообразие над \mathbb{k} это топологическое пространство X , у каждой точки которого есть открытая окрестность U с гомеоморфизмом $\varphi_U : U \simeq X_U$, где X_U — аффинное многообразие с топологией Зарисского¹, и любые две таких аффинных карты U и W согласованы в том смысле, что гомеоморфизм $\varphi_W \circ \varphi_U^{-1}$ между открытыми подмножествами $\varphi_U(U \cap W) \subset X_U$ и $\varphi_W(U \cap W) \subset X_W$ задаётся в координатах рациональными функциями, определёнными всюду на этих подмножествах. Через \mathcal{O}_X обозначается пучок локально рациональных функций на X со значениями в \mathbb{k} . Пучок \mathcal{O}_X -модулей \mathcal{M} на X называется *квазикогерентным*, если есть такое аффинное покрытие $X = \bigcup U_i$, что $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{O}_X(W)$ для всех открытых $W \subset U_i$ при каждом i . Пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ на проективном пространстве \mathbb{P}^n имеет сечениями над открытым $U \subset \mathbb{P}^n$ такие рациональные функции φ от однородных координат x на \mathbb{P}^n , что $\forall p \in U \exists$ однородные *многочлены* f_p, g_p от x с $\deg f_p - \deg g_p = d, g_p(p) \neq 0$ и $\varphi(u) = f_p(u)/g_p(u)$ для всех $u \in U$ с $g_p(u) \neq 0$.

ПГА6♦1. Комплексом Кошуля элементов f_1, f_2, \dots, f_m коммутативного кольца K с единицей называется тензорное произведение $K_{f_1 f_2 \dots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{i=1}^m K_{f_i}$ сосредоточенных в степенях 0, 1 двучленных комплексов K_{f_i} вида $K \rightarrow K, x \mapsto f_i x$. Обозначим через $\Lambda = \bigoplus_{i=0}^m \Lambda^i$ внешнюю алгебру свободного модуля K^m ранга m с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Покажите, что: а) комплекс Кошуля изоморфен комплексу $0 \rightarrow \Lambda^0 \xrightarrow{\xi} \Lambda^1 \xrightarrow{\xi} \dots \xrightarrow{\xi} \Lambda^{m-1} \xrightarrow{\xi} \Lambda^m \xrightarrow{\xi} 0$, дифференциал в котором задаётся левым умножением на $\xi = \sum f_i \xi_i \in \Lambda^1$ б) если f_i не делит нуль в $K/(f_{i+1}, \dots, f_m)$ ни при каком i , то $H^m(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq K/(f_1, f_2, \dots, f_m)$, а остальные $H^i(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) = 0$.

ПГА6♦2. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X с координатной алгеброй $A = \mathbb{k}[X]$ покрыто главными открытыми множествами $U_i = \mathcal{D}(f_i) = \{p \in X \mid f_i(p) \neq 0\}$ для некоторых $f_1, f_2, \dots, f_m \in A$. Покажите, что а) последовательность A -модулей точна тогда и только тогда, когда для каждого i точна её локализация по² f_i б) для любого A -модуля M и любых $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ комплекс Кошуля $M_{f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_m^{n_m}} = M \otimes_A K_{f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_m^{n_m}}$ точен в) комплекс Чеха $0 \rightarrow M \rightarrow \prod_i M_{(f_i)} \rightarrow \prod_{i < j} M_{(f_i f_j)} \rightarrow \prod_{i < j < k} M_{(f_i f_j f_k)} \rightarrow \dots$, в котором $M_{(h)} \stackrel{\text{def}}{=} M \otimes_A A[h^{-1}]$ и дифференциал ds семейства $s = (s_{i_0 i_1 \dots i_p}) \in \prod_{i_0 < \dots < i_p} M_{(f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p})}$ имеет компоненты $(ds)_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_{v=1}^p (-1)^v s_{i_0 \dots \hat{i}_v \dots i_{p+1}} \in M_{(f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_{p+1}})}$, является фильтрующимся копределом комплексов Кошуля и тоже точен г) аффинные открытые покрытия алгебраических многообразий ацикличны для всех квазикогерентных пучков.

ПГА6♦3. Используя покрытие многообразия $X = \mathbb{A}^{n+1} \setminus 0$ картами $U_i = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \neq 0\}$ укажите базис пространства $\bigoplus_p H^p(X, \mathcal{O}_X)$ над \mathbb{k} .

ПГА6♦4. Убедитесь, что все пучки $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ на $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ суть локально свободными $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ -модулями ранга 1, и постройте *точную последовательность Эйлера* $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow V \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$, где V — постоянный пучок векторных пространств, а $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}$ — касательный пучок (локальных векторных полей с рациональными коэффициентами).

ПГА6♦5. Вычислите на \mathbb{P}^n когомологии когерентных пучков: а) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ б) $\Lambda^k \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}$ в) $\Lambda^k \Omega_{\mathbb{P}^n}$, где $\Omega_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ — кокасательный пучок (локальных дифференциальных 1-форм с рациональными коэффициентами).

ПГА6♦6. Покажите, что: а) пучок идеалов \mathcal{J} рациональной кубической кривой Веронезе в \mathbb{P}^3 включается в точную тройку $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^{\oplus 3} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0$ б) две кубики Веронезе пересекаются, если и только если они лежат на одной кубической поверхности.

¹Т. е. $X_U \subset \mathbb{k}^m$ задаётся системой полиномиальных уравнений. Замкнутые множества в X_U суть множества, также задаваемые системами полиномиальных уравнений. Кольцо $\mathbb{k}[X_U] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m]/I$, где I — идеал многочленов, тождественно зануляющихся на X_U , называется *координатным кольцом* аффинного многообразия X_U .

²Т. е. результат применения к ней точного функтора $M \mapsto M \otimes_A A[f_i^{-1}]$.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5а			
б			
в			
6а			
б			