

Напоминалка про комплексы и (ко)гомологии

ПГАЗ♦1. Для комплексов A, B (левых) модулей над (некоммутативным) кольцом с единицей рассмотрим $\text{Hom}_{\text{DG}}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_i \text{Hom}^i(A, B)$, где $\text{Hom}^i(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_V \text{Hom}(A^V, B^{V+i})$, как комплекс с дифференциалом $d : \psi \mapsto d_B \psi - (-1)^{|\psi|} \psi d_A$, где $\psi \in \text{Hom}^{|\psi|}(A, B)$ однороден степени $|\psi|$. Положим $\text{Hom}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d \cap \text{Hom}_{\text{DG}}^0(A, B)$ и $\text{Hom}_{\mathcal{H}o}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(\text{Hom}_{\text{DG}}(A, B)) = \text{Hom}(A, B) / \text{im } d$. Покажите, что а) комплексы с группами Hom в качестве морфизмов образуют абелеву категорию¹ б) комплексы с группами Hom_{DG} в качестве морфизмов образуют DG-катеорию² в) комплексы с группами $\text{Hom}_{\mathcal{H}o}$ в качестве морфизмов образуют категорию³ г) любой морфизм $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$ корректно задаёт гомоморфизм градуированных модулей $\varphi_* : \bigoplus_i H^i(A) \rightarrow \bigoplus_i H^i(B)$ д) если $\varphi = \psi$ в $\text{Hom}_{\mathcal{H}o}(A, B)$, то $\varphi_* = \psi_*$ е) функторы когомологий $A \mapsto \bigoplus_i H^i(A)$ перестановочны с фильтрующимися копределами в $\mathcal{C}om$.

ПГАЗ♦2. В категории $\mathcal{C}om$ постройте на каждом комплексе K функториальную по K убывающую фильтрацию подкомплексами $\dots \supset F^i \supset F^{i+1} \supset \dots$, каждый присоединённый фактор которой $G^i = F^i / F^{i+1}$ имеет единственный ненулевой модуль когомологий, причём последний располагается в степени i и равен а) K^i б) $H^i(K)$.

ПГАЗ♦3. Функция $\alpha : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow A$ из объектов абелевой категории \mathcal{A} в абелеву группу A называется *аддитивной*, если для любой точной тройки $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ в \mathcal{A} выполняется соотношение $\alpha(L) = \alpha(K) + \alpha(M)$. Докажите для любой аддитивной функции α и любого ограниченного⁴ комплекса K формулу Эйлера $\sum (-1)^i \alpha(K^i) = \sum (-1)^i \alpha(H^i(K))$.

ПГАЗ♦4. Функториально сопоставьте точной тройке $0 \rightarrow K \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$ в категории $\mathcal{C}om$ точную последовательность $\dots \rightarrow H^i(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^i(L) \xrightarrow{\psi_*} H^i(M) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(L) \rightarrow \dots$.

ПГАЗ♦5. Для конечномерного векторного пространства V над полем \mathbb{k} с $\text{char } \mathbb{k} = 0$ и ненулевого ковектора $\xi \in V^*$ вычислите когомологии комплексов ΛV и ΛV^* с дифференциалами⁵

$$\partial_\xi : \Lambda^m V \rightarrow \Lambda^{m-1} V, \quad \eta \mapsto \partial_\xi \eta \quad \text{и} \quad \xi : \Lambda^m V^* \rightarrow \Lambda^{m+1} V^*, \quad \omega \mapsto \xi \wedge \omega.$$

ПГАЗ♦6. Выберем в векторном пространстве $V = \mathbb{k}^n$ базис, обозначим через x_i и ξ_i образы базисных векторов в алгебрах SV и ΛV и рассмотрим следующие два эндоморфизма d и ∂ векторного пространства $SV \otimes \Lambda V = \bigoplus_{k,m} S^k V \otimes \Lambda^m V$:

$$\begin{aligned} \partial &= \sum x_i \otimes \frac{\partial}{\partial \xi_i} : S^k V \otimes \Lambda^m V \rightarrow S^{k+1} V \otimes \Lambda^{m-1} V, \quad f \otimes \omega \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot f \otimes \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i}, \\ d &= \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \xi_i : S^k V \otimes \Lambda^m V \rightarrow S^{k-1} V \otimes \Lambda^{m+1} V, \quad f \otimes \omega \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \otimes \xi_i \wedge \omega. \end{aligned}$$

а) Покажите, что они не зависят от выбора базиса в V и $\partial^2 = 0 = d^2$.

б) Вычислите s -коммутатор $\partial d + d \partial$ и когомологии обоих дифференциалов.

¹Т. е. *точную* в смысле листка 2½ категорию, где функтор Hom принимает значения в $\mathcal{A}b$, причём композиции морфизмов дистрибутивны по отношению к их сложению, и у любых двух объектов есть произведение и копроизведение, которые изоморфны друг другу. Она называется *категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om$.

²Т. е. дифференциал на Hom_{DG} связан с композицией *формулой Лейбница*: $d(\varphi\psi) = (d\varphi)\psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi(d\psi)$. Эта категория называется *DG-категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om_{\text{DG}}$.

³Она называется *гомотопической категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{H}o$.

⁴Комплекс K называется *ограниченным сверху* (соотв. *снизу*), если $K^i = 0$ при всех $i \gg 0$ (соотв. при всех $i \ll 0$), и просто *ограниченным*, если он ограничен и сверху и снизу.

⁵Оператор ∂_ξ переводит $\omega \in \Lambda^m V$ в умноженный на $m = \deg \omega$ образ при проекции $V^{\otimes(m-1)} \rightarrow \Lambda^{m-1} V$ тензора, полученного свёрткой ковектора ξ по первому сомножителю с тем единственным кососимметричным $\tilde{\omega} \in V^{\otimes m}$, что переходит в ω при проекции $V^{\otimes m} \rightarrow \Lambda^m V$. Если e_i и ξ_i — двойственные базисы в V^* и V , то $\partial_{\xi_i} = \frac{\partial}{\partial e_i}$.

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
д			
е			
2а			
б			
3			
4			
5			
6а			
б			