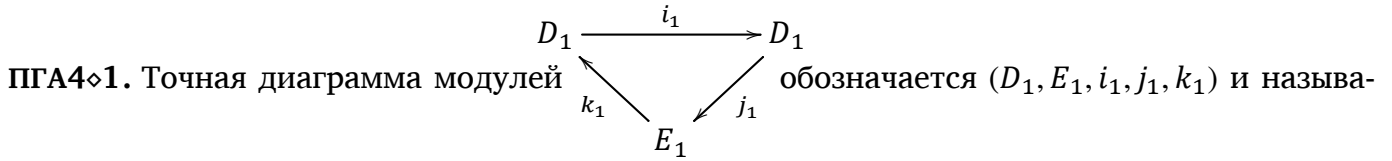


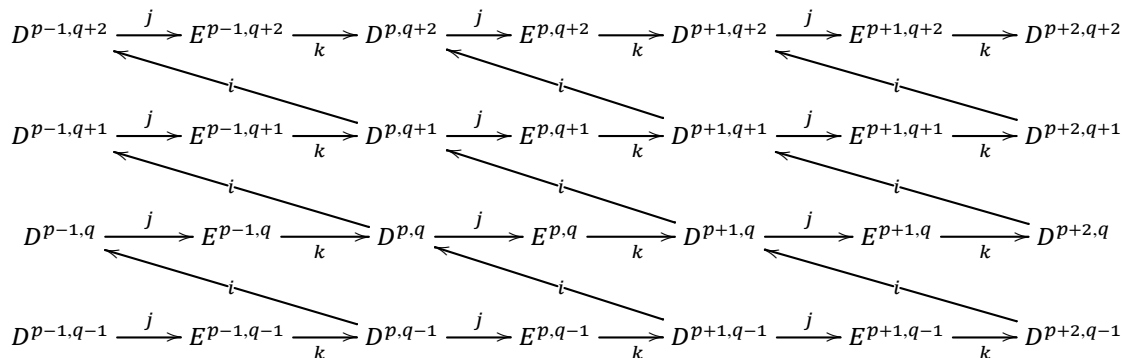
**Спектральные последовательности.**



Положим  $d_1 = j_1 k_1$ ,  $E_2 = \ker d_1 / \text{im } d_1$ ,  $D_2 = \text{im } i_1$ ,  $i_2 = i_1|_{\text{im } i_1}$ ,  $j_2 : i_1(x) \mapsto j_1(x)$  и  $k_2 : x \pmod{\text{im } d_1} \mapsto k_1(x)$ . Покажите, что а)  $d_1^2 = 0$ ,  $j_2$  и  $k_2$  определены корректно, а  $(D_2, E_2, i_2, j_2, k_2)$  является точной парой (она называется *производной* от  $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ ) б) в  $(r - 1)$ -той производной паре  $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$  модули  $D_r = \text{im } i_1^{r-1}$  и  $E_r = k_1^{-1}(\text{im } i_1^{r-1}) / j_1(\ker i_1^r)$  включаются в точную тройку

$$0 \rightarrow \text{im } i_1^{r-1} / \text{im } i_1^r \rightarrow E_r \rightarrow \ker i_1^r / \ker i_1^{r-1} \rightarrow 0.$$

ПГА4♦2. Пусть модули  $D_1 = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} D_1^{p,q}$  и  $E_1 = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E_1^{p,q}$  биградуированы, а морфизмы однородны бистепеней  $\text{deg } i_1 = (-1, 1)$ ,  $\text{deg } j_1 = (0, 0)$  и  $\text{deg } k_1 = (1, 0)$ . Разместим модули  $E_r^{p,q}$  из  $(r - 1)$ -той производной  $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$  от начальной точной пары  $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$  в прямоугольную таблицу с горизонтальной координатой  $p$  и вертикальной  $q$ . Пусть  $E_1^{p,q} = 0$  при  $q \ll 0$  равномерно по  $p$  и при  $p \ll 0$  равномерно по  $q$ . Покажите, что для каждой клетки  $(p, q)$  найдётся такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $\forall r > N E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$ , и опишите  $E_\infty^{p,q}$  как подфактор в  $D_1$  в терминах ядер и/или образов итерированного гомоморфизма  $i_1 : D_1 \rightarrow D_1$  (см. диаграмку ниже).



**Предел.** Пусть  $\forall p, q$  существует такое  $N = N(p, q)$ , что входящий в клетку  $(p, q)$  и выходящий из клетки  $(p, q)$  дифференциалы во всех таблицах  $E_r^{p,q}$  с  $r > N$  зануляются, так что корректно определены  $E_\infty^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} E_{N+1}^{p,q} = E_{N+2}^{p,q} = \dots$ . Если существуют модули  $E_\infty^n$  с такими убывающими фильтрациями  $F^p E_\infty^n$ , что  $E_\infty^n = \bigcup_p F^p E_\infty^n$ ,  $\bigcap_p F^p E_\infty^n = 0$  и  $F^p E_\infty^n / F^{p+1} E_\infty^n = E_\infty^{n-p}$ , то говорят, что  $E_r^{p,q}$  сходятся к  $E_\infty^n$  и пишут  $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$ .

ПГА4♦3. Пусть каждый член  $K^m$  комплекса  $\dots \rightarrow K^m \rightarrow K^{m+1} \rightarrow \dots$  снабжён конечной убывающей фильтрацией  $K^m = F^0 K^m \supset F^1 K^m \supset F^2 K^m \supset \dots \supset 0$  с  $d(F^p K^m) \subset F^p K^{m+1}$  при всех  $p, m$ . Покажите, что: а) при каждом  $p$  корректно определён фактор комплекс  $G^p K$  с  $m$ -тым членом  $F^p K^m / F^{p+1} K^m$  и дифференциалом, индуцированным дифференциалом  $d$  исходного комплекса  $K$  б) модули  $D_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p K)$  и  $E_1^{p,q} = H^{p+q}(G^p K)$  организуются в биградуированную точную пару с  $r$ -той производной  $E_{r+1}^{p,q} \simeq Z_r^{p,q} / (B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}) \simeq (Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}) / B_r^{p,q}$ , где  $Z_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in F^p K^{p+q} \mid dc \in d(F^{p+r} K^{p+q})\}$  и  $B_r^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} d(F^{p-r} K^{p+q-1}) + F^{p+1} K^{p+q}$  в)  $E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(K)$ .

ПГА4♦4. Рассмотрите на тотальном комплексе  $\text{Tot}(K)$  бикомплекса  $K = \bigoplus K^{p,q}$  две фильтрации  ${}^I F$  и  ${}^II F$  с  ${}^I F^p \text{Tot}^m(K) = \bigoplus_{v \geq p, p+q=n} K^{p,q}$  и  ${}^II F^q \text{Tot}^m(K) = \bigoplus_{v \geq q, p+q=n} K^{p,q}$  и получите две спектралки:  ${}^I E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(K))$  с  ${}^I E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$  и  ${}^II E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\text{Tot}(K))$  с  ${}^II E_2^{p,q} = H_{d_2}^q(H_{d_1}^p(K))$ .

Персональный табель \_\_\_\_\_ .  
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (22.02.2018)

<b>№</b>	<b>дата</b>	<b>кто принял</b>	<b>подпись</b>
<b>1а</b>			
<b>б</b>			
<b>2</b>			
<b>3а</b>			
<b>б</b>			
<b>в</b>			
<b>4</b>			