Когомологии с компактными носителями

Соглашения и обозначения. В этом листке все пучки суть пучки абелевых групп, а все топологические пространства X локально компактны и имеют конечную когомологическую размерность $\dim_c X < \infty$ (см. задачу ПГА6◇8). Тензорное произведение пучков F и G имеет над открытыми $U \subset X$ сечения $F \otimes G(U) \stackrel{\text{def}}{=} L(U) \otimes F(U)$ (тензорное произведение абелевых групп). Пучок L на X называется *плоским*, если функтор $F \mapsto L \otimes F$ точен на категории пучков.

ПГА8◇1. Для пучка F на X и вложения произвольного замкнутого подмножества $\iota : Z \hookrightarrow X$ постройте изоморфизм $\operatorname*{colim}_{U \supset Z} H^0_c(U, F) \xrightarrow{\sim} H^0_c(Z, \iota^* F)$.

ПГА8◇2. Постройте точную последовательность Майера – Виеториса из зад. ПГА5◇6 для когомологий с компактными носителями и произвольных замкнутых подмножеств.

ПГА8◇3. Для любых пучка F на X, открытого подмножества $U \subset X$ и дополнительного к нему замкнутого подмножества $Z = X \smallsetminus U$ постройте длинную точную последовательность

$$\cdots \to H^i_c(U, F) \to H^0_c(X, F) \to H^0_c(Z, F) \to H^{i+1}_c(U, F) \to \cdots .$$

ПГА8◇4. Покажите, что пучок F мягок, если и только если $H^1_c(U, F) = 0$ для всех открытых подмножеств $U \subset X$.

ПГА8◇5. Вычислите когомологии с компактными носителями постоянных пучков $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ и на замкнутом полупространстве $x_1 \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$.

ПГА8◇6. Докажите, что когомологии с компактными носителями постоянного пучка $\mathbb{R}$ на гладком многообразии X канонически изоморфны когомологиям комплекса Де Рама гладких глобальных дифференциальных форм на X с компактными носителями.

ПГА8◇7. Для открытого $U \subset X$ обозначим через $\mathbb{Z}_U$ пучок на X, ассоциированный с предпучком, группа сечений которого над открытым W равна $\mathbb{Z}$, если $U \cap W \neq \varnothing$, и нулевая в остальных случаях. Покажите что: **а)** пучок $\mathbb{Z}_U$ копредставляет функтор $\Gamma_U : F \mapsto F(U)$ из пучков в абелевы группы и является плоским **б)** всякий пучок F на X есть коядро морфизма пучков, являющихся прямыми суммами пучков вида $\mathbb{Z}_U$ **в)** всякий пучок F на X является копределом функториальной по F диаграммы, состоящей из пучков вида $\mathbb{Z}_U$.

ПГА8◇8. Покажите, что контравариантный функтор из категории пучков в абелевы группы представим, если и только если он переводит копределы в пределы.

ПГА8◇9. Покажите, что: **а)** резольвента Годемана плоского пучка состоит из мягких плоских пучков **б)** любой плоский пучок имеет конечную мягкую плоскую резольвенту.

ПГА8◇10. Для плоского мягкого пучка L на X покажите, что **а)** пучок $L \otimes F$ мягок для любого пучка F **б)** функтор $\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{S}h(Y)$, $F \mapsto f_!(L \otimes F)$, точен для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ и обладает правым сопряжённым, который переводит инъективные пучки в инъективные.

ПГА8◇11*. Пусть X — ориентируемое n-мерное многообразие с краем, $\omega_X = i_! \mathbb{R}$ — продолжение на X нулём постоянного пучка со слоем $\mathbb{R}$ на $X \smallsetminus \partial X$. Для любого пучка F на X постройте канонический изоморфизм $H^i_c(X, F)^* \simeq \operatorname{Ext}^{n-i}_{\mathcal{S}h(X)}(F, \omega_X)$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 8 (26.04.2018)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8			
9а			
б			
10а			
б			
11			